УДК 681.326

В. И. Сеньченков, И. Н. Некрасов

ОГРАНИЧЕНИЯ В ЗАДАЧАХ ПОСТРОЕНИЯ ОПТИМАЛЬНЫХ АЛГОРИТМОВ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ТЕХНИЧЕСКОГО СОСТОЯНИЯ СИСТЕМЫ

Рассматриваются особенности построения алгоритмов определения технического состояния системы, оптимальных по заранее заданному критерию. Предложены формальные конструкции, описывающие как последовательность выполнения проверок контролируемых признаков, так и ограничения при оптимизации алгоритмов. Представлена оригинальная математическая постановка задачи синтеза алгоритма, оптимального по критерию максимума средней вероятности получения правильного решения о техническом состоянии системы, со всеми видами ограничений.

Ключевые слова: *алгебра подмножеств, алгоритм, критерий, ограничения, оптимизация, показатель эффективности, проверка, техническое состояние.*

Введение. Важнейшей составной частью диагностического обеспечения системы является алгоритм определения технического состояния. В зависимости от подходов к обработке выходных процессов системы при формировании диагностических моделей принципы построения алгоритмов могут существенно различаться. В работе [1] представлены решающие правила, являющиеся основой алгоритмов, в случае выполнения формализации выходных процессов на основе свойств пространства L_2 (пространство измеримых функций, квадратично интегрируемых по Лебегу [2]). Возникает задача формирования всех возможных вариантов последовательности выполнения проверок π_j ($j=\overline{1,n}$) контролируемых признаков (т.е. всех возможных вариантов реализации алгоритма определения технического состояния) с целью нахождения оптимального по некоторому заранее заданному критерию.

Постановка задачи определения последовательности проверок. Задано:

— множество изображений

$$\boldsymbol{E} = \{\mathbf{E}_i \mid i=\overline{0,m}\} \tag{1}$$

всех видов технического состояния системы, сформированных в результате обучения [3], где

$$\mathbf{E}_i = (e_{i1}, e_{i2}, \ldots, e_{ij}, \ldots, e_{in})^m; \tag{2}$$

— распределение вероятностей

$$\boldsymbol{P} = \{P(\mathbf{E}_i) \mid i=\overline{0,m}\} \tag{3}$$

на множестве видов технического состояния;

— множество проверок

$$\Pi = \{\pi_j \mid j=\overline{1,n}\}, \tag{4}$$

при этом изображения $\mathbf{E}_i$ заданных видов технического состояния попарно различимы между собой, т. е. выполняется условие

$$\forall\ \mathbf{E}_i, \mathbf{E}_f \in \boldsymbol{E},\ i \neq f\ \exists\ \pi_j\colon \pi_j \in \Pi,\ e_{i\,j} \neq e_{f\,j}. \tag{5}$$

Условие (5) означает, что для любой пары рассматриваемых видов технического состояния системы на заданном множестве П имеется хотя бы одна проверка, которая дает разные исходы в этих состояниях.

Координатами $e_{i\,j}$ изображения (2) являются модельные (типовые) исходы выполняемых проверок π_j, соответствующие i-му виду технического состояния. Значения индекса i используются в дальнейшем следующим образом. При контроле работоспособности и поиске отказов системы значение i = 0 указывает на работоспособное состояние, $i=\overline{1,m}$ — на отказы функциональных элементов. При контроле правильности функционирования системы i = 0 обозначает состояние неправильного функционирования, а $i=\overline{1,m}$ — отдельные режимы правильного функционирования.

На основе исходных данных (1)—(5) требуется найти для каждого i-го вида технического состояния системы упорядоченное подмножество проверок $\Pi_i \subset \Pi$ такое, что

$$\Pi_i = \{\pi_j \mid \pi_j \in \Pi,\ \forall\ \mathbf{E}_i \in \boldsymbol{E},\ \forall\ \mathbf{E}_f \in \boldsymbol{E} \setminus \{\mathbf{E}_i\},\ e_{i\,j} \neq e_{f\,j}\}. \tag{6}$$

Из соотношения (6) видно, что каждое подмножество содержит такие π_j, на которых все виды технического состояния наблюдаемы, т.е. изображения попарно различимы между собой.

Формальное описание последовательности выполнения проверок. Очевидно, что множество

$$\Pi^* = \bigcup_{i=0}^{m} \Pi_i$$

содержит необходимые проверки для распознавания всех $m+1$ видов технического состояния. Определение технического состояния производится следующим образом: выполняется первая выбранная проверка $\pi_{j_1} \in \Pi^*$, анализируются ее результаты и на основании этого выбирается вторая проверка $\pi_{j_2} \in \Pi^*$, т.е. процесс накопления информации о состоянии системы является рекуррентным.

Следовательно, диагностирование, связанное с выполнением ряда проверок, исходы которых заранее непредсказуемы, необходимо рассматривать как случайный эксперимент [4, 5]. Универсальной математической моделью случайного эксперимента является вероятностное пространство. Применительно к рассматриваемому эксперименту его модель задается множествами

$$M = (\boldsymbol{E}, \mathcal{A}_{\boldsymbol{E}}, P, \Theta), \tag{7}$$

где $\boldsymbol{E}$ — множество изображений (исходов эксперимента); $\mathcal{A}_{\boldsymbol{E}} = \{\mathsf{R} \mid \mathsf{R} \subseteq \boldsymbol{E}\}$ — алгебра* подмножеств множества $\boldsymbol{E}$, в которой элементы R имеют смысл фазовых состояний моделируемого процесса; $P=\left\{P(\mathsf{R}) | P(R)=\sum\limits_{\mathbf{E}_i \in \mathsf{R}} P(\mathbf{E}_i), \mathsf{R} \in \mathcal{A}_{\boldsymbol{E}}\right\}$ — вероятностная мера, заданная на алгебре $\mathcal{A}_{\boldsymbol{E}}$; $\Theta = \{\theta_i \mid \theta_i\colon \boldsymbol{E} \to \mathsf{R}_i,\ i=\overline{0,m}\,\}$ — множество операторов, описывающих переходы от начального фазового состояния $\mathsf{R}=\boldsymbol{E}$ к конечным $\mathsf{R}_i = \{\mathbf{E}_i\}$, каждое из которых содержит единственный элемент $\mathbf{E}_i$, соответствующий идентифицированному виду технического состояния системы.

Таким образом, R_i может интерпретироваться как принятое решение о техническом состоянии, т. е. как элемент множества $\boldsymbol{R}$ возможных решений о наблюдаемом техническом состоянии системы. Естественно, что и всякое фазовое состояние $\mathsf{R} \subseteq \boldsymbol{E}$, с одной стороны,

* Алгеброй называется система множеств, замкнутая относительно конечного числа операций пересечения этих множеств [2].

означает подмножество предполагаемых видов технического состояния, в одном из которых находится система. С другой стороны, фазовые состояния могут рассматриваться и как подмножества множества $\boldsymbol{R}$ решений о техническом состоянии ($\mathsf{R} \subseteq \boldsymbol{R}$).

До начала диагностирования неизвестно, какой вид технического состояния системы соответствует реальному, а поэтому начальное фазовое состояние совпадает с множеством $\boldsymbol{E}$, т. е. $\mathsf{R} = \boldsymbol{E}$. При выполнении первой и последующих проверок контролируемых признаков из множества $\boldsymbol{E}$ исключаются те $\mathbf{E}_i \in \boldsymbol{E}$, которые несовместимы с исходами выполняемых проверок. Таким образом, после каждой проверки размерность исходного фазового состояния $\mathsf{R} = \boldsymbol{E}$ сокращается. Процесс продолжается до получения конечного фазового состояния R_i, содержащего единственный элемент $\mathbf{E}_i$, фазовые состояния, содержащие два и более элементов, в дальнейшем обозначаются через R_k.

Отдельная проверка π_j при ее r-м исходе переводит процесс диагностирования из некоторого фазового состояния $\mathsf{R}_k \subseteq \boldsymbol{E}$ в состояние $\mathsf{R}_{kj}^r \subset \mathsf{R}_k$, т.е. реализует отображение

$$\pi_j\colon \mathsf{R}_k \to \mathsf{R}_{kj}^r, \tag{8}$$

где $\mathsf{R}_{kj}^r = \{\mathbf{E}_i | \mathbf{E}_i \in \mathsf{R}_k, \pi_j = \pi_j^r, r = \overline{1, \omega_j}\}$; ω_j — число исходов проверки π_j.

Для достижения конечного фазового состояния R_i в общем случае требуется несколько раз выполнить отображение (8), используя разные проверки $\pi_j \in \Pi$, образующие подмножество $\Pi_i \subset \Pi$ проверок, необходимых для идентификации наблюдаемого состояния системы с одним из заданных видов технического состояния. С учетом этого всякий оператор θ_i из множества Θ, входящего в модель (7), формально может быть описан в виде композиции отображений (8), каждое из которых реализуется одной проверкой:

$$\theta_i = \prod_{\pi_j \in \Pi_i} (\pi_j : \mathsf{R}_k \to \mathsf{R}_{kj}^r)\,. \tag{9}$$

Так как первая проверка $\pi_j \in \Pi$ применяется в начальном фазовом состоянии $\mathsf{R}_k = \boldsymbol{E}$, а последняя приводит к получению конечного фазового состояния $\mathsf{R}_{kj}^r = \mathsf{R}_i$, то правая часть выражения (9) может быть представлена в виде

$$\prod_{\pi_j \in \Pi_i} \pi_j : \boldsymbol{E} \to \mathsf{R}_i\,,\ i = \overline{0, m}\,. \tag{10}$$

Известно [6], что отображение (10) может быть реализовано, если

$$\sum_{\pi_j \in \Pi_i} \dim \ker \pi_j = |F| - 1\,, \tag{11}$$

где $|F|$ — мощность индексного множества видов технического состояния системы ($|F| = m + 1$); $\dim\ker\pi_j$ — размерность ядра отображения (10), которое определяется выражением

$$\ker\pi_j = \{\mathbf{E}_i \mid \mathbf{E}_i \in \mathsf{R}_k,\ \pi_j = \pi_j^r\}\,.$$

Равенство (11) является условием достижимости конечного фазового состояния $\boldsymbol{R}_i$ из начального $\mathsf{R}_k = \boldsymbol{E}$. Оно задает правило остановки процесса диагностирования.

Целенаправленным выбором проверок с учетом их характеристик можно гибко изменять алгоритм диагностирования, придавая ему требуемые свойства. В связи с этим необходимо выбрать характеристики, от которых зависят доверие к результатам диагностирования, его оперативность и экономичность.

Характеристиками доверия являются вероятности ошибок 1-го (α_j) и 2-го (β_j) рода при выполнении проверок [5, 7]. Ошибка 1-го рода возникает, когда измеренное значение контролируемого признака не соответствует допустимому интервалу его изменения, а в результате проверки принимается, что значение входит в допустимый интервал. Ошибка 2-го рода появляется, когда измеренное значение контролируемого признака попадает в допустимый интервал, а в результате проверки принимается, что не попадает.

Указанные вероятности образуют множества

$$\mathbf{A} = \{\alpha_j \mid j = \overline{1,n}\},\ \mathbf{B} = \{\beta_j \mid j = \overline{1,n}\}, \tag{12}$$

которые включаются в модель диагностирования в качестве ее элементов.

Для выполнения проверок, а следовательно и для определения технического состояния системы, необходимы ресурсы. На этапе эксплуатации системы определяющую роль играют динамические ресурсы, прежде всего временной и трудовой, от наличия которых непосредственно зависит получение информации о техническом состоянии. Поэтому данные ресурсы и учитываются в предлагаемой модели.

Выполнение произвольной проверки требует времени на подготовку и установку контрольно-измерительного средства, подачу тестового воздействия, измерение значения контролируемого признака, обработку и интерпретацию результатов измерения. Кроме этого, требуются и подготовительные работы на системе, от которых также зависит продолжительность проверки. Например, при виброакустическом диагностировании отдельных узлов с вращательным или возвратно-поступательным движением инерционных масс установка датчиков должна производиться в непосредственной близости от этих узлов с целью уменьшения влияния помех. Для этого на системе выполняются определенные демонтажные работы.

Выполнение проверок сопровождается также трудозатратами. Если величина трудозатрат указывается только для того, чтобы производить сравнение проверок по данному показателю, то могут использоваться условные единицы, которые отражают соотношения трудозатрат при выполнении различных проверок. Такие единицы и используются в дальнейшем.

Таким образом, в качестве элементов модели рассматриваются множества

$$\mathbf{T} = \{t(\pi_j) \mid j = \overline{1,n}\},\ \mathbf{C} = \{c(\pi_j) \mid j = \overline{1,n}\}, \tag{13}$$

где $t(\pi_j)$, $c(\pi_j)$ — затраты времени и труда на выполнение j-й проверки.

Включение в модель (7) множеств (12) и (13), которая принимает вид

$$M = (\boldsymbol{E}, \mathcal{A}_{\boldsymbol{E}}, P, \Theta, \mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{T}, \mathbf{C}),$$

позволяет придавать необходимые свойства процессу принятия решений о техническом состоянии системы.

Формирование критерия оптимальности алгоритма определения технического состояния системы. Задача оптимизации алгоритма должна быть инвариантной по отношению к конкретному виду показателя эффективности **P**, который применяется для ее решения.

Идентификация i-го вида технического состояния предполагает выполнение в определенном порядке некоторого подмножества Π_i проверок, обладающих заданными характеристиками. Целенаправленным выбором проверок контролируемых признаков для всех подмножеств Π_i ($i = \overline{0,m}$) в зависимости от их характеристик и сформулированных ограничений можно добиться экстремального значения показателя **P**.

Очевидно, что оптимизационная задача в данном случае относится к классу комбинаторных. Каждое упорядоченное подмножество Π_i можно рассматривать как элемент алгебры подмножеств $\mathcal{A}(\Pi)$, заданной на множестве Π. Далее в рассмотрение необходимо включить множество $m[\mathcal{A}(\Pi)]$ перестановок на элементах алгебры $\mathcal{A}(\Pi)$. Это множество содержит все возможные упорядоченные сочетания проверок контролируемых признаков. Следовательно, экстремальное значение показателя **P** необходимо искать именно на этом множестве альтернатив.

Оптимизационная задача формулируется следующим образом. Найти последовательность $(\Pi_f)_{f \in F}$ упорядоченных подмножеств проверок контролируемых признаков такую, что

$$\mathbf{P}(\Pi_f)_{f \in F} = \underset{p \in m[\mathcal{A}(\Pi)]}{\operatorname{extr}} \mathbf{P}\{((\Pi_f)_{f \in F})_p\}. \quad (14)$$

Ограничения на состав контролируемых признаков включают условие попарной различимости изображений (6) и условие достижимости конечного фазового состояния (11).

В каждом частном случае структура равенства (14) определяется тем, какое конкретное свойство принимается в качестве показателя эффективности процесса диагностирования. Пусть таким свойством является достоверность решения о техническом состоянии, т.е. его соответствие наблюдаемому техническому состоянию системы.

Тогда в качестве показателя эффективности может быть выбрана вероятность D получения правильного решения о техническом состоянии. Оптимизация должна проводиться по критерию максимума данного показателя:

$$D(\Pi_f)_{f \in F} = \max_{p \in m[\mathcal{A}(\Pi)]} D\{((\Pi_f)_{f \in F})_p\}, \quad (15)$$

при этом должны выполняться ограничения (6) и (11) на состав контролируемых признаков, а также на временные и трудовые ресурсы.

Пусть система диагностирования зафиксировала i-й вид технического состояния при условии, что наблюдаемое состояние системы также соответствует i-му виду состояния, т.е. одновременно произошли события $\mathbf{E}_i$ и R_i. Следует заметить, что события R_i не могут считаться достоверным результатам из-за наличия погрешностей при выполнении проверок. Очевидно, что условная вероятность $P(\mathsf{R}_i \mid \mathbf{E}_i)$ представляет собой вероятность D_i получения правильного решения для i-го вида технического состояния: $D_i = P(\mathsf{R}_i \mid \mathbf{E}_i)$. Так как при идентификации i-го вида технического состояния реализуются проверки из упорядоченного подмножества Π_i, можно записать, что $D_i = D\Pi_i$.

В этом случае вероятность D получения правильного решения в целом для алгоритма определяется как средняя, которая аппроксимирует математическое ожидание величины D_i:

$$D = ED(\Pi_i)_{i=\overline{0,\,m}} = \sum_{i=0}^{m} P(\mathbf{E}_i) P(\mathsf{R}_i | \mathbf{E}_i). \quad (17)$$

Структура ограничений оптимизационной задачи на ресурсы формируется из аналогичных рассуждений. Если $\sum\limits_{\pi_j \in \Pi_i} t(\pi_j)$ и $\sum\limits_{\pi_j \in \Pi_i} c(\pi_j)$ — суммарные затраты временных и трудовых ресурсов на выполнение проверок контролируемых признаков, необходимых для определения i-го вида технического состояния, то оценку математического ожидания затрат получим из выражений:

$$ET = \sum_{i=0}^{m} P(\mathbf{E}_i) \sum_{\pi_j \in \Pi_i} t(\pi_j); \; EC = \sum_{i=0}^{m} P(\mathbf{E}_i) \sum_{\pi_j \in \Pi_i} c(\pi_j). \quad (18)$$

Затраты (18) не должны превышать максимально допустимых величин M_t и M_c соответственно.

Для того чтобы оптимизировать алгоритм определения технического состояния системы, необходимо оперировать выражением (17) в явном виде. Следовательно, должны быть выведены соотношения для вычисления вероятностей $P(\mathsf{R}_i \mid \mathbf{E}_f)$ как правильных решений о техническом состоянии при $i = f$, так и ошибочных ($i \neq f$).

Для идентификации произвольного вида технического состояния необходимо выполнить ряд проверок контролируемых признаков. При этом вероятности ошибок 1-го и 2-го рода зависят только от метрологических характеристик контрольно-измерительных приборов и допусков на контролируемые признаки. Поэтому вероятности возникновения этих ошибок для разных проверок статистически независимы, что позволяет использовать формулу умножения вероятностей при вычислении общей ошибки контроля и диагностирования на множестве Π_i, исходя из этого

$$P(\mathsf{R}_i \mid \mathbf{E}_f) = \prod_{\pi_j \in \Pi_i} \gamma_{i\,f}(\pi_j)\,. \tag{19}$$

Здесь сомножители $\gamma_{i\,f}(\pi_j)$ определяются на основе решающих правил [1] и вероятностей ошибок 1-го и 2-го рода производимых проверок. При контроле функционирования системы сомножители для различных целевых задач вычисляются из следующих выражений:

$$\gamma_{i\,f}(\pi_j) = \begin{cases} 1-\alpha_j, \text{ если } |y_{ij}-e_{ij}| = \min\limits_{f=1,\,m}\{|y_{ij}-e_{fj}|\},\ i=\overline{1,m}; \\ 1-\beta_j, \text{ если } |y_{ij}-e_{ij}| = \min\limits_{f=0,\,m}\{|y_{ij}-e_{fj}|\},\ i=0; \\ \alpha_j, \text{ если } |y_{ij}-e_{fj}| = \min\limits_{f=1,\,m}\{|\,y_{ij}-e_{fj}\,|\},\ f=0; \\ \beta_j, \text{ если } |y_{ij}-e_{fj}| = \min\limits_{f=1,\,m}\{|y_{ij}-e_{fj}\,|\},\ i=0, \end{cases} \tag{20}$$

где y_{ij} — текущее значение j-го контролируемого признака, для которого принадлежность i-му виду технического состояния установлена.

При контроле работоспособности и поиске отказов выражения для определения сомножителей $\gamma_{i\,f}(\pi_j)$ имеют вид:

$$\gamma_{i\,f}(\pi_j) = \begin{cases} 1-\alpha_j, \text{ если } |y_{ij}-e_{ij}| = \min\limits_{f=0,\,m}\{|y_{ij}-e_{fj}\,|\},\ i=0; \\ 1-\beta_j, \text{ если } |y_{ij}-e_{ij}| = \min\limits_{f=1,\,m}\{|y_{ij}-e_{fj}|\},\ i=\overline{1,m}; \\ \alpha_j, \text{ если } |y_{ij}-e_{fj}| = \min\limits_{f=1,\,m}\{|y_{ij}-e_{fj}|\},\ i=0; \\ \beta_j, \text{ если } |y_{ij}-e_{fj}| = \min\limits_{f=1,\,m}\{|y_{ij}-e_{fj}|\},\ f=0. \end{cases} \tag{21}$$

Таким образом, с учетом соотношений (19)—(21), а также ограничений (6), (11) и (18) задача оптимизации по критерию максимума средней вероятности получения правильного решения о техническом состоянии системы математически формулируется следующим образом. Найти упорядоченные подмножества $\Pi_i \subseteq \Pi$ ($i=\overline{0,m}$) такие, что:

$$ED = \max_{p \in \mathrm{m}[\mathcal{A}(\Pi)]} \left\{ \sum_{i=0}^{m} P(\mathbf{E}_i) \left(\prod_{\pi_j \in \Pi_i} \gamma_{i\,i}(\pi_j) \right)_p \right\};$$

$$\Pi_\mathrm{i} = \{\pi_j \mid \pi_j \in \Pi,\ \forall\, \mathbf{E}_i \in \boldsymbol{E},\ \forall\, \mathbf{E}_f \in \boldsymbol{E} \setminus \{\mathbf{E}_i\},\ e_{i\,j} \neq e_{f\,j}\}; \tag{22}$$

$$\sum_{\pi_j \in \Pi_i} \dim \ker \pi_j = |F| - 1;$$

$$\sum_{i=0}^{m} P(\mathbf{E}_i) \sum_{\pi_j \in \Pi_i} t(\pi_j) \le M_t; \qquad \sum_{i=0}^{m} P(\mathbf{E}_i) \sum_{\pi_j \in \Pi_i} c(\pi_j) \le M_c.$$

Заключение. Решение задачи (22) обеспечивает максимальную достоверность определения технического состояния системы. Наиболее рациональным для решения этой задачи является метод динамического программирования [8].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Сеньченков В. И.* Решающие правила в алгоритмах определения технического состояния системы // Изв. вузов. Приборостроение. 2013. Т. 56, № 3. С. 5—11.

2. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Физматлит, 2009. 572 с.

3. *Сеньченков В. И.* Модели, методы и алгоритмы анализа технического состояния. Saarbrücken: LAP LAMBERT Academic Publishing, 2013. 377 с.

4. *Дмитриев А. К., Юсупов Р. М.* Идентификация и техническая диагностика. М.: МО, 1987. 521 с.

5. Контроль и диагностика сложных технических систем / Под ред. *В. Г. Беликова*. М.: Энергоатомиздат, 1986. 104 с.

6. *Ван дер Варден Б. Л.* Алгебра. М.: Наука, 1979. 623 с.

7. *Резчиков А. Ф., Кушников В. А., Твердохлебов В. А., Марков А. И.* Информационно-измерительный комплекс для диагностирования дефектов геометрических параметров фюзеляжей вертолетов // Авиакосмическое приборостроение. 2012. № 4. С. 35—40.

8. *Беллман Р., Калаба Р.* Динамическое программирование и современная теория управления / Под ред. *Б. С. Разумихина*. М.: Наука, 1969. 118 с.

Сведения об авторах

Валентин Иванович Сеньченков — д-р техн. наук, профессор; Военно-космическая академия им. А. Ф. Можайского, кафедра специальных технических систем космических комплексов, Санкт-Петербург; E-mail: svi9@rambler.ru

Игорь Николаевич Некрасов — адъюнкт; Военно-космическая академия им. А. Ф. Можайского, кафедра специальных технических систем космических комплексов, Санкт-Петербург; E-mail: ponomarev igor 1985@mail.ru

Рекомендована кафедрой
специальных технических систем
космических комплексов

Поступила в редакцию
29.03.14 г.