

## СИНТЕЗ ФИЛЬТРА С ЗАДАННОЙ ЧАСТОТНОЙ ПЕРЕДАТОЧНОЙ ФУНКЦИЕЙ

С. И. ЗИАТДИНОВ

Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения,  
190000, Санкт-Петербург, Россия  
E-mail: kaf53@guap.ru

Предложена методика синтеза фильтра с независимыми и практически любыми амплитудно- и фазочастотными характеристиками. Получено выражение для импульсной характеристики фильтра. Приведен конкретный пример.

**Ключевые слова:** фильтр, частотная передаточная функция, импульсная характеристика.

При обработке информации наиболее часто используется процедура фильтрации сигнала с помощью различных фильтров — фильтров нижних и верхних частот, полосовых и режекторных фильтров. В ряде случаев применяются адаптивные фильтры, параметры которых могут изменяться в зависимости от спектральных характеристик обрабатываемых сигналов.

Вместе с тем управление частотной передаточной функцией фильтра является достаточно сложной технической задачей. Далеко не всегда удается согласовать параметры фильтра с характеристиками сигналов на его входе. При этом существует достаточно жесткая связь между амплитудно-частотной характеристикой (АЧХ) фильтра и его фазочастотной характеристикой (ФЧХ).

Несомненно представляет практический интерес разработка фильтра с заранее заданными АЧХ и ФЧХ, которые в то же время были бы не связаны друг с другом. Решение этой задачи является основным содержанием настоящей статьи.

Пусть желаемые АЧХ и ФЧХ фильтра имеют вид, показанный соответственно на рис. 1, а, б жирными линиями. При этом АЧХ фильтра в области отрицательных частот является зеркальной копией АЧХ в области положительных частот относительно оси  $W(\omega)$ , а ФЧХ также зеркальна относительно оси  $\varphi(\omega)$ , но в области отрицательных частот имеет отрицательный знак.

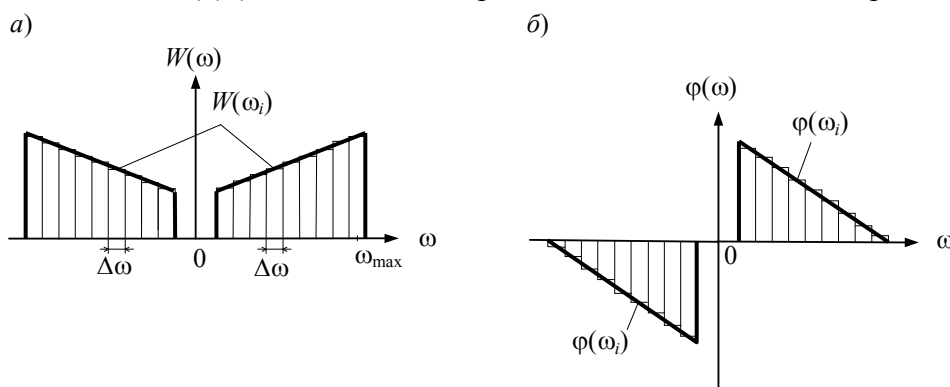


Рис. 1

Для синтеза фильтра с заданными произвольными и независимыми АЧХ и ФЧХ проведем их дискретизацию по частоте с шагом  $\Delta\omega$ , в пределах которого не происходит существенных изменений  $W(\omega)$  и  $\varphi(\omega)$ . В результате АЧХ и ФЧХ фильтра можно представить в виде последовательности прямоугольников высотой  $W(\omega_i)$  и  $\varphi(\omega_i)$  с основанием  $\Delta\omega$  (см. рис. 1, тонкие линии).

Очевидно, что чем меньше шаг дискретизации по частоте  $\Delta\omega$ , тем меньше дискретизированные АЧХ и ФЧХ будут отличаться от исходных АЧХ и ФЧХ фильтра. В результате синтезированный фильтр можно представить в виде параллельно соединенных элементарных фильтров с АЧХ  $W_i(\omega) = W(\omega_i)$  и ФЧХ  $\varphi_i(\omega) = \varphi(\omega_i)$ , где  $i$  — номер элементарного фильтра. АЧХ и ФЧХ элементарного фильтра приведены на рис. 2, а, б соответственно.

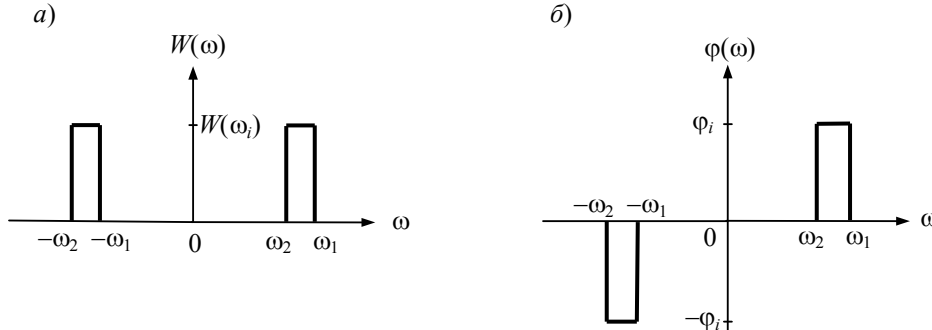


Рис. 2

В целом синтезированный фильтр будет иметь следующую частотную передаточную функцию:

$$W_{\Sigma}(j\omega) = \sum_{i=1}^N W_i(\omega) e^{j\varphi_i(\omega)}, \quad (1)$$

где  $N$  — количество элементарных фильтров.

Из данного соотношения следует, что посредством независимого выбора необходимых значений  $W_i(\omega)$  и  $\varphi_i(\omega)$  можно получить практически любую частотную передаточную функцию  $W_{\Sigma}(j\omega)$ .

Импульсная характеристика такого фильтра принимает вид [см. лит.]

$$h_{\Sigma}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W_{\Sigma}(j\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{i=1}^N W_i(\omega) e^{j\varphi_i(\omega)} e^{j\omega t} d\omega. \quad (2)$$

Поменяв интеграл и сумму в выражении (2) местами, получим

$$h_{\Sigma}(t) = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W_i(\omega) e^{j[\omega t + \varphi_i(\omega)]} d\omega = \sum_{i=1}^N h_i(t), \quad (3)$$

где  $h_i(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W_i(\omega) e^{j[\omega t + \varphi_i(\omega)]} d\omega$  — импульсная характеристика элементарного фильтра.

Найдем импульсную характеристику элементарного фильтра, считая, что в пределах его полосы пропускания  $\Delta\omega$  величины  $W_i(\omega)$  и  $\varphi_i(\omega)$  остаются постоянными:

$$\begin{aligned} h_i(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_2}^{-\omega_1} W_i e^{-j\varphi_i} e^{j\omega t} d\omega + \frac{1}{2\pi} \int_{\omega_1}^{\omega_2} W_i e^{j\varphi_i} e^{j\omega t} d\omega = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_2}^{-\omega_1} W_i e^{j(\omega t - \varphi_i)} d\omega + \frac{1}{2\pi} \int_{\omega_1}^{\omega_2} W_i e^{j(\omega t + \varphi_i)} d\omega. \end{aligned} \quad (4)$$

Используя в формуле (4) преобразование Лапласа  $e^{j\varphi} = \cos \varphi + j \sin \varphi$ , после несложных тригонометрических преобразований получаем

$$h_i(t) = \frac{1}{\pi} \int_{\omega_1}^{\omega_2} W_i \cos(\omega t + \varphi_i) d\omega = \frac{2W_i}{\pi t} \sin\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t\right) \cos\left(\frac{\omega_2 + \omega_1}{2} t + \varphi_i\right). \quad (5)$$

Преобразуем выражение (5) к виду

$$h_i(t) = \frac{2W_i}{\pi t} \sin \frac{\Delta\omega t}{2} \cos(\omega_i t + \varphi_i), \quad (6)$$

где  $\omega_i = \frac{\omega_2 + \omega_1}{2}$  — средняя частота АЧХ элементарного фильтра с полосой пропускания  $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$ .

В частном случае можно записать:

$$\begin{aligned} \varphi_i = \mp\pi/2, \quad h_i(t) &= \pm \frac{2W_i}{\pi t} \sin \frac{\Delta\omega t}{2} \sin \omega_i t; \\ \varphi_i = \mp\pi/4, \quad h_i(t) &= \frac{\sqrt{2} \cdot W_i}{\pi t} \sin \frac{\Delta\omega t}{2} (\cos \omega_i t \pm \sin \omega_i t); \\ \varphi_i = \mp\pi/6, \quad h_i(t) &= \frac{W_i}{\pi t} \sin \frac{\Delta\omega t}{2} (\sqrt{3} \cdot \cos \omega_i t \pm \sin \omega_i t); \\ \varphi_i = 0, \quad h_i(t) &= \frac{2W_i}{\pi t} \sin \frac{\Delta\omega t}{2} \cos \omega_i t. \end{aligned}$$

В качестве примера рассмотрим синтез фильтра нижних частот первого порядка с частотной передаточной функцией вида

$$W(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega\tau},$$

где  $\tau$  — постоянная времени фильтра.

Данной частотной передаточной функции соответствуют следующие АЧХ и ФЧХ:

$$W(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2\tau^2}}, \quad \varphi(\omega) = -\arctg \omega\tau. \quad (7)$$

При этом импульсная характеристика фильтра определяется выражением

$$h(t) = \frac{1}{\tau} e^{-t/\tau}.$$

В соответствии с выражениями (3), (6) и (7) импульсная характеристика синтезируемого фильтра нижних частот принимает вид

$$h_\Sigma(t) = \sum_{i=1}^N \frac{2}{\pi t \sqrt{1 + \omega_i^2 \tau^2}} \sin \frac{\Delta\omega t}{2} (\cos \omega_i t - \arctg \omega_i \tau).$$

При расчетах полагалось  $\tau = 0,01$  с,  $f_{i\max} = \omega_{i\max} / 2\pi = 10$  кГц.

Качество синтезированного фильтра оценивалось по относительной среднеквадратической ошибке вычисления импульсной характеристики фильтра:

$$\sigma_h = \sqrt{\frac{1}{M} \sum_{k=1}^M \{ [h(t) - h_\Sigma(t)] / h(t) \}^2},$$

где  $M$  — число учитываемых отсчетов импульсной характеристики, которое было принято равным 100; отсчеты брались с периодом 0,001 с.

Были получены следующие результаты: при ширине полосы пропускания элементарного фильтра  $\Delta f = \Delta\omega / 2\pi = 10$  Гц нормированная среднеквадратическая ошибка  $\sigma_h = 2,32$  %; при  $\Delta f = 5$  Гц —  $\sigma_h = 0,91$  % и при  $\Delta f = 1$  Гц —  $\sigma_h = 0,8$  %.

Таким образом, с уменьшением полосы пропускания элементарного фильтра частотная передаточная функция синтезированного фильтра стремится к желаемой частотной передаточной функции.

Рассмотренная методика синтеза позволяет получить фильтр практически с любой частотной передаточной функцией.

## ЛИТЕРАТУРА

Гоноровский И. С. Радиотехнические цепи и сигналы. М.: Радио и связь, 1986. 512 с.

**Сведения об авторе**

**Сергей Ильич Зиятдинов** — д-р техн. наук, профессор; СПбГУАП, кафедра информационно-сетевых технологий; E-mail: kaf53@guap.ru

Рекомендована кафедрой  
информационно-сетевых технологий

Поступила в редакцию  
11.03.14 г.

**Ссылка для цитирования:** Зиятдинов С. И. Синтез фильтра с заданной частотной передаточной функцией // Изв. вузов. Приборостроение. 2016. Т. 59, № 1. С. 69—72.

**SYNTHESIS OF FILTER WITH SPECIFIED FREQUENCY TRANSFER FUNCTION****S. I. Ziatdinov**

*Saint Petersburg State University of Aerospace Instrumentation, 190000, St. Petersburg, Russia*  
*E-mail: kaf53@guap.ru*

A method is proposed for synthesis of filter with independent and practical arbitrary amplitude and phase frequency characteristics. An expression describing impulse characteristic of the filter is derived. An example of filter synthesis with the use of the proposed method is presented.

**Keywords:** filter, frequency transfer function, impulse characteristic.

**Data on author**

**Sergey I. Ziatdinov** — Dr. Sci., Professor; St. Petersburg State University of Aerospace Instrumentation, Department of Information Networks Technologies;  
E-mail: kaf53@guap.ru

**For citation:** Ziatdinov S. I. Synthesis of filter with specified frequency transfer function // Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Priborostroyeniye. 2016. Vol. 59, N 1. P. 69—72 (in Russian).

DOI: 10.17586/0021-3454-2016-59-1-69-72