УДК 519.2
DOI: 10.17586/0021-3454-2016-59-3-197-201

# ОЦЕНИВАНИЕ ХАРАКТЕРИСТИК НАДЕЖНОСТИ СЛОЖНОЙ СИСТЕМЫ ПРИ ОГРАНИЧЕННОМ ОБЪЕМЕ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ДАННЫХ

А. А. Ардашов, В. Н. Арсеньев, С. Б.Силантьев

*Военно-космическая академия им. А. Ф. Можайского, 197198, Санкт-Петербург, Россия*
*E-mail: vladar56@mail.ru*

Рассматривается задача оценивания характеристик надежности сложной системы по ограниченному объему опытных данных. Для повышения точности оценок предлагается использовать метод приоритета опытной информации, позволяющий объединить все имеющиеся априорные и экспериментальные данные о характеристиках надежности.

***Ключевые слова:*** *сложная система, надежность, ограниченные испытания, метод приоритета опытной информации*

**Введение.** Надежность является одним из основных свойств сложной системы, характеризующим ее способность выполнять целевые задачи в заданных режимах и условиях применения. Поэтому техническое задание на разработку системы всегда содержит требования к ее надежности. Для проверки соответствия сложной системы требованиям заказчика на всех этапах ее построения проводятся всесторонние исследования надежности. Получаемая при этом информация может быть условно разделена на априорную (накопленную до проведения испытаний опытных образцов системы) и опытную (полученную по результатам натурных испытаний). Число натурных испытаний, как правило, весьма ограничено, что не позволяет обеспечить высокую достоверность оценок характеристик надежности. Для повышения качества оценивания используется априорная информация.

В настоящее время круг методов, позволяющих производить совместную обработку априорных и опытных данных, достаточно ограничен [1—5]. Сложность применения таких методов связана главным образом либо с необходимостью выбора априорных распределений (методы, основанные на использовании формулы Байеса), либо с неопределенностью выбора весов априорной и опытной информации в апостериорных оценках характеристик надежности. Для решения данной задачи предлагается использовать метод приоритета опытной информации (ПОИ), который лишен этих ограничений [6, 7].

**Постановка задачи.** Полагается, что время безотказной работы сложной системы (случайное время наработки системы до отказа) $0<\overset{\wedge}{X}<\infty$ имеет гамма-распределение

$$\varphi_{\overset{\wedge}{X}}(X;\boldsymbol{\mu})=\varphi_{\overset{\wedge}{X}}(X;\alpha,\beta)=\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)\beta^{\alpha+1}}X^{\alpha}\exp\{-X/\beta\}, \qquad (1)$$

где $\boldsymbol{\mu}=\begin{bmatrix}\alpha & \beta\end{bmatrix}^T$ — вектор параметров распределения; $\alpha>-1$; $\beta>0$; $\Gamma(\cdot)$ — гамма-функция.

Параметры распределения (1) связаны с математическим ожиданием (средним временем безотказной работы) $M_{\overset{\wedge}{X}}$ и дисперсией $D_{\overset{\wedge}{X}}$ величины $\overset{\wedge}{X}$ зависимостями

$$M_{\overset{\wedge}{X}}=(\alpha+1)\beta,\quad D_{\overset{\wedge}{X}}=(\alpha+1)\beta^2. \qquad (2)$$

По результатам натурных испытаний $N_{\text{с}}$ опытных образцов получены значения времени наработки системы до отказа: $X_i$, $i=\overline{1,N_{\text{с}}}$.

Имеется априорная информация, представленная оценками $M_p$ и $D_p$ математического ожидания $M_{\hat{X}}$ и дисперсии $D_{\hat{X}}$, либо оценками $\alpha_p$, $\beta_p$ параметров $\alpha$, $\beta$ распределения (1). Оценки $\alpha_p$, $\beta_p$ и $M_p$, $D_p$ связаны между собой соотношениями, аналогичными выражениям (2), $\mathbf{\mu}_p = \left[\alpha_p \;\; \beta_p\right]^T$.

Необходимо получить апостериорные оценки вероятностных характеристик времени безотказной работы $\hat{X}$ системы, учитывающие всю имеющуюся априорную и опытную информацию.

В соответствии с методом приоритета опытной информации на первым этапе решения задачи необходимо по опытным данным найти оценки максимального правдоподобия параметров распределения (1).

**Определение опытных оценок.** Функция правдоподобия, соответствующая распределению (1) и выборке $X_i$, $i = \overline{1, N_c}$, имеет вид

$$\prod_{i=1}^{N_c} \varphi_{\hat{X}}\left(X_i;\mathbf{\mu}\right) = \prod_{i=1}^{N_c} \varphi_{\hat{X}}(X_i;\alpha,\beta) = \frac{1}{\Gamma^{N_c}\left(\alpha+1\right)\beta^{N_c(\alpha+1)}}\left(\prod_{i=1}^{N_c} X_i\right)^{\alpha} \exp\left\{-\frac{1}{\beta}\sum_{i=1}^{N_c} X_i\right\}. \qquad (3)$$

Оценки максимального правдоподобия $\alpha_o$, $\beta_o$ параметров $\alpha$, $\beta$ обеспечивают максимум функции (3), т. е.

$$\left(\alpha_o,\beta_o\right) = \arg\max_{\alpha>-1,\beta>0} \prod_{i=1}^{N_c} \varphi_{\hat{X}}(X_i;\alpha,\beta) = \arg\max_{\alpha>-1,\beta>0} \ln\prod_{i=1}^{N_c} \varphi_{\hat{X}}(X_i;\alpha,\beta).$$

Поскольку функция плотности распределения (1) является регулярной, то определение опытных оценок $\alpha_o$ и $\beta_o$ (или $\mathbf{\mu}_o = \left[\alpha_o \;\; \beta_o\right]^T$) осуществляется при необходимых условиях максимума функции (3) по параметрам $\alpha$ и $\beta$:

$$\left.\frac{\partial \ln\prod_{i=1}^{N_c} \varphi_{\hat{X}}(X_i;\alpha,\beta)}{\partial\alpha}\right|_{\alpha=\alpha_o,\beta=\beta_o} = 0; \quad \left.\frac{\partial \ln\prod_{i=1}^{N_c} \varphi_{\hat{X}}(X_i;\alpha,\beta)}{\partial\beta}\right|_{\alpha=\alpha_o,\beta=\beta_o} = 0,$$

что приводит к системе из двух нелинейных уравнений с двумя неизвестными:

$$\left(\alpha_o+1\right)\beta_o = \frac{1}{N_c}\sum_{i=1}^{N_c} X_i; \;\; \Psi\left(\alpha_o+1\right) + \ln\beta_o = \frac{1}{N_c}\sum_{i=1}^{N_c} \ln X_i, \qquad (4)$$

где $\Psi\left(\cdot\right)$ — пси-функция.

Решение системы уравнений (4) может быть получено методом Ньютона.

На основе опытных оценок $\alpha_o$ и $\beta_o$ параметров $\alpha$ и $\beta$ в соответствии со вторым этапом метода ПОИ определяется вес априорной информации в апостериорных оценках и сами оценки.

**Определение апостериорных оценок характеристик надежности.** Функция правдоподобия (3) с учетом (4) может быть представлена в виде

$$L(\mathbf{\mu}_o;\mathbf{\mu}) = \frac{1}{\Gamma^{N_c}\left(\alpha+1\right)\beta^{N_c(\alpha+1)}} \exp\left\{\alpha N_c\left[\Psi\left(\alpha_o+1\right)+\ln\beta_o\right] - \frac{N_c\left(\alpha_o+1\right)\beta_o}{\beta}\right\}.$$

Поскольку близость результатов априорных оценок к опытным данным характеризуется отношением правдоподобия, для проверки гипотезы $H: \alpha = \alpha_p$, $\beta = \beta_p$:

$$\nu^* = \frac{L(\boldsymbol{\mu}_o;\boldsymbol{\mu}_p)}{L(\boldsymbol{\mu}_o;\boldsymbol{\mu}_o)} =$$

$$= \frac{\Gamma^{N_c}\left(\alpha_o+1\right)\beta_o^{N_c(\alpha_o+1)}}{\Gamma^{N_c}\left(\alpha_p+1\right)\beta_p^{N_c(\alpha_p+1)}} \exp\left\{N_c\left(\alpha_p-\alpha_o\right)\left[\Psi\left(\alpha_o+1\right)+\ln\beta_o\right]+N_c\left(\alpha_o+1\right)\left(1-\frac{\beta_o}{\beta_p}\right)\right\},$$

в качестве величины, определяющей вес априорных данных в апостериорных оценках, используется значение $\nu^*$, которое может изменяться в диапазоне от 0 до 1.

Полагается, что опытные оценки $\alpha_o$ и $\beta_o$ параметров $\alpha$ и $\beta$ получены методом максимального правдоподобия по некоторой гипотетической выборке объемом $N_p=\nu^* N_c$ из генеральной совокупности с распределением (1). Соответствующая функция правдоподобия имеет вид

$$L\left(\boldsymbol{\mu}_p;\boldsymbol{\mu}\right) = \frac{1}{\Gamma^{N_p}\left(\alpha+1\right)\beta^{N_p(\alpha+1)}} \exp\left\{\alpha N_p\left[\Psi\left(\alpha_p+1\right)+\ln\beta_p\right]-\frac{N_p\left(\alpha_p+1\right)\beta_p}{\beta}\right\}.$$

Тогда апостериорные оценки $\alpha_a$, $\beta_a$ параметров $\alpha$, $\beta$ определяются исходя из необходимых условий максимума функции $L(\boldsymbol{\mu})=L(\boldsymbol{\mu}_o;\boldsymbol{\mu})L(\boldsymbol{\mu}_p;\boldsymbol{\mu})$: $\left.\frac{\partial L(\boldsymbol{\mu})}{\partial\boldsymbol{\mu}}\right|_{\boldsymbol{\mu}=[\alpha_a\ \beta_a]^T}=0$, которые приводят к системе уравнений

$$\begin{gathered}
\Psi\left(\alpha_a+1\right)+\ln\beta_a = \frac{\Psi\left(\alpha_o+1\right)+\ln\beta_o+\nu^*\left[\Psi\left(\alpha_p+1\right)+\ln\beta_p\right]}{1+\nu^*}, \\
\left(\alpha_a+1\right)\beta_a = \frac{\left(\alpha_o+1\right)\beta_o+\nu^*\left(\alpha_p+1\right)\beta_p}{1+\nu^*}.
\end{gathered} \tag{5}$$

Апостериорные оценки среднего времени безотказной работы системы и дисперсии, учитывающие результаты натурных испытаний и априорных исследований надежности, определяются по формулам, аналогичным (2):

$$M_a=\left(\alpha_a+1\right)\beta_a=\frac{M_o+\nu^* M_p}{1+\nu^*},\ D_a=M_a\beta_a=\frac{M_a^2}{\alpha_a+1}. \tag{6}$$

Можно показать, что дисперсии оценок (6) меньше дисперсий соответствующих оценок $\alpha_o$ и $\beta_o$, полученных без учета априорной информации. В частности, приближенный выигрыш в точности оценивания математического ожидания $M_{\hat{X}}$, получаемый за счет учета априорной информации, определяется как

$$\delta=\frac{D\left[M_o\right]}{D\left[M_a\right]}\approx\frac{D_o\left(1+\nu^*\right)^2}{D_o+\nu^* D_p}, \tag{7}$$

откуда следует, что максимальный выигрыш $\delta=2$ достигается при полном совпадении априорных и опытных данных, поскольку в этом случае $\nu^*=1$.

**Пример.** Рассмотрим сложную систему. Известно, что длительность интервала времени $\hat{X}$ между первым и последующими отказами системы имеет гамма-распределение.

Известны результаты испытаний 10 опытных образцов ($N_c=10$): $X_1=1096$ ч, $X_2=981$ ч, $X_3=766$ ч, $X_4=1209$ ч, $X_5=993$ ч, $X_6=1240$ ч, $X_7=1166$ ч, $X_8=816$ ч;

$X_9 = 718$ ч; $X_{10} = 924$ ч, а также априорные оценки $M_p = 1100$ ч и $D_p = 40000$ ч$^2$ математического ожидания $M_{\hat{X}}$ и дисперсии $D_{\hat{X}}$ величины $\hat{X}$, на основе которых по формулам, аналогичным (2), рассчитаны априорные оценки параметров распределения (1): $\alpha_p = 29,250$; $\beta_p = 36,364$ ч.

Необходимо найти апостериорные оценки характеристик надежности системы.

Оценки максимального правдоподобия параметров $\alpha$, $\beta$, математического ожидания $M_{\hat{X}}$ и дисперсии $D_{\hat{X}}$ величины $\hat{X}$, полученные по результатам испытаний опытных образцов, равны: $\alpha_o = 29,436$; $\beta_o = 32,554$ ч, $M_o$=991 ч и $D_o$=32256 ч$^2$.

Отношение правдоподобия $\nu^* = 0,203$. Тогда апостериорные оценки характеристик надежности системы, полученные по формулам (5), (6), имеют следующие значения: $\alpha_a = 28,037$; $\beta_a = 34,756$ ч; $M_a = 1009$ ч; $D_a = 35076$ ч$^2$. Отсюда видно, что априорная оценка среднего времени безотказной работы системы является достаточно завышенной.

В соответствии с показателем (7) апостериорная оценка $M_a$ точнее опытной оценки $M_o$ примерно в 1,16 раза.

**Заключение.** Применение метода приоритета опытной информации для оценивания характеристик надежности сложных систем по результатам испытаний ограниченного числа образцов позволяет улучшить качество оценивания этих характеристик и повысить достоверность принимаемых решений о соответствии системы требованиям технического задания.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Пугачев В. Н.* Комбинированные методы определения вероятностных характеристик. М.: Сов. радио, 1973. 256 с.

2. Элементы теории испытаний и контроля технических систем / Под ред. *Р. М. Юсупова*. Л.: Энергия, 1978. 192 с.

3. *Кринецкий Е. И., Александровская Л. И., Шаронов А. В., Голубков А.С.* Летные испытания ракет и космических аппаратов. М.: Машиностроение, 1979. 464 с.

4. *Щербаков П. С.* Использование априорной информации для уточнения оценок параметров // Изв. АН СССР. Автоматика и телемеханика. 1988. № 5. С. 80—89.

5. *Арсеньев В. Н.* Новые методы принятия решений при ограниченных экспериментальных данных. СПб: ВКА им. А. Ф. Можайского, 1999. 90 с.

6. *Арсеньев В. Н., Ардашов А. А., Зайцев М. А.* Оценивание характеристик надежности сложных систем по результатам испытаний ограниченного числа опытных образцов // Сб. статей II Всерос. науч.-практ. конф. „Современные проблемы создания и эксплуатации вооружения, военной и специальной техники“. СПб: ВКА им. А. Ф. Можайского, 2014. С. 190—191.

7. *Арсеньев В. Н.* Оценивание характеристик систем управления по ограниченному числу натурных испытаний. М.: Рестарт, 2013. 126 с.

***Сведения об авторах***

***Август Анатольевич Ардашов*** — канд. техн. наук, доцент; ВКА им. А. Ф. Можайского

***Владимир Николаевич Арсеньев*** — д-р техн. наук, профессор; ВКА им. А. Ф. Можайского, кафедра бортовых информационных и измерительных комплексов; E-mail: vladar56@mail.ru

***Сергей Борисович Силантьев*** — канд. техн. наук, доцент; ВКА им. А. Ф. Можайского, кафедра автономных систем управления

Рекомендована кафедрой
бортовых информационных
и измерительных комплексов

Поступила в редакцию
01.06.15 г.

**Ссылка для цитирования:** *Ардашов А. А., Арсеньев В. Н., Силантьев С. Б.* Оценивание характеристик надежности сложной системы при ограниченном объеме экспериментальных данных // Изв. вузов. Приборостроение. 2016. Т. 59, № 3. С. 197—201.

**ASSESSMENT OF RELIABILITY CHARACTERISTICS OF A COMPLEX SYSTEM BY A LIMITED VOLUME OF EXPERIMENTAL DATA**

**A. A. Ardashov, V. N. Arseniev, S. B. Silantev**

*A. F. Mozhaysky Military Space Academy, 197198, St. Petersburg, Russia*
*E-mail: vladar56@mail.ru*

The problem of evaluation of complex system reliability characteristics by a limited volume of experimental data is considered. To improve the estimates accuracy, it is proposed to apply the method of experimental data priority allowing for combining all available a priory and experimental data on the reliability characteristics.

**Keywords:** complex system, reliability, limited testing, method of experimental data priority

***Data on authors***

| | | |
|---|---|---|
| ***Avgust A. Ardashov*** | — | PhD, Associate Professor; A. F. Mozhaysky Military Space Academy |
| ***Vladimir N. Arseniev*** | — | Dr. Sci., Professor; A. F. Mozhaysky Military Space Academy, Department of Onboard Information and Measuring Complexes; E-mail: vladar56@mail.ru |
| ***Sergey B. Silantev*** | — | PhD, Associate Professor; A. F. Mozhaysky Military Space Academy, Department of Independent Control Systems |

**For citation**: *Ardashov A. A., Arseniev V. N., Silantev S. B.* Assessment of reliability characteristics of a complex system by a limited volume of experimental data // Izv. vuzov. Priborostroenie. 2016. Vol. 59, N 3. P. 197—201 (in Russian).

DOI: 10.17586/0021-3454-2016-59-3-197-201