# ПРИБОРЫ И СИСТЕМЫ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

УДК 62.50
DOI: 10.17586/0021-3454-2017-60-7-603-611

## ОБЕСПЕЧЕНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ ПРИ ОГРАНИЧЕННЫХ ВОЗМУЩАЮЩИХ ВОЗДЕЙСТВИЯХ

А. А. Ведяков, В. Ю. Тертычный-Даури

*Университет ИТМО, 197101, Санкт-Петербург, Россия*
*E-mail: tertychny-dauri@mail.ru*

Рассматривается задача об обеспечении асимптотической устойчивости нелинейной динамической системы путем регулирования ее параметров при действии на систему внешних ограниченных возмущений. Решение найдено с помощью робастного конечно-сходящегося алгоритма настройки параметров, определена также оценка области притяжения, пропорциональная уровню возмущений.

***Ключевые слова:*** *динамическая система, ограниченное возмущение, целевое неравенство, конечно-сходящийся алгоритм*

**Введение.** Изучению вопросов устойчивости движения динамических систем при воздействии разного рода ограниченных детерминированных возмущений посвящено множество исследований (см., например, работы [1—6] и содержащуюся там библиографию). Особым направлением в развитии теории алгоритмической устойчивости можно считать исследования, посвященные адаптивному параметрическому синтезу в целях обеспечения условий стабилизации и оптимизации движения при наличии возмущающих воздействий [7—17].

Возмущения того или иного вида могут кардинальным образом влиять на устойчивость и движение всей системы. Важно поэтому не только определить степень влияния возмущений (помех, шумов, флуктуаций) на общую устойчивость динамических систем, но и возможность их нивелирования в рамках рассматриваемого алгоритмического метода настройки параметров.

В настоящей статье анализируется вопрос об устойчивости нелинейных динамических систем при воздействии ограниченных возмущений. Решается задача об обеспечении устойчивости с помощью регулирования параметров для случая, когда на систему действуют сторонние внешние ограниченные возмущения (так называемая задача о придании системе диссипативных свойств). Решение найдено с использованием робастных конечно-сходящихся алгоритмов настройки параметров [18].

**Постановка задачи.** Отметим, прежде всего, что настоящая статья может рассматриваться как естественное продолжение работы [19], но с учетом воздействия на нелинейную динамическую систему ограниченных детерминированных возмущений. В статье [19] речь идет об обеспечении устойчивости нулевого решения невозмущенной системы вида

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\sigma}, t), \qquad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, \qquad t \geq t_0 = 0, \tag{1}$$

где $\mathbf{x}(t) \in R^n$ — вектор состояния системы, $\mathbf{f}(0, \boldsymbol{\sigma}, t) = 0 \quad \forall t \in [0, \infty)$, $t$ — текущий момент времени, с помощью регулирования вектора параметров $\boldsymbol{\sigma}(t) \in \Sigma \subset R^m$, входящих линейно в непрерывно дифференцируемую вектор-функцию $\mathbf{f}(\cdot)$, $\Sigma$ — некоторое ограниченное множество; здесь $\mathbf{x}(t)$ — измеряемая сколь угодно точно векторная величина.

Пусть на систему (1) действуют неизвестные (неконтролируемые) равномерно ограниченные по времени неслучайные (детерминированные) внешние возмущения. Для этой ситуации в уравнение (1) аддитивно введем возмущения $\mathbf{v}(t)$, полагая константу $C_v$, их ограничивающую, известной:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\sigma}, t) + \mathbf{v}(t), \qquad \mathbf{v}(t) \in V_v \subset R^n, \tag{2}$$

где, при прежних обозначениях и предположениях, будем считать, что $\sup_{t \in I} \|\mathbf{v}(t)\| \le C_v$, причем множество функций $\mathbf{v}(t)$, удовлетворяющих этому неравенству, образует некоторый класс помех $V_v$; $\|\mathbf{v}(t)\|$ — евклидова норма вектора $\mathbf{v}(t)$.

Под устойчивостью системы на фоне действия неконтролируемых ограниченных возмущений понимается [7, 8] наличие у системы диссипативных свойств, т.е. попадание всех траекторий ее движения с течением времени в ограниченную область в фазовом пространстве $\{\mathbf{x}, \boldsymbol{\sigma}\}$ вне зависимости от начальных данных $\mathbf{x}(t_0)$, $\boldsymbol{\sigma}(t_0)$, $t_0 = 0$, но в зависимости от уровня возмущений, характеризуемого константой $C_v$.

Для этого случая рассмотрим задачу обеспечения устойчивости решений системы (2) в рамках применения робастных градиентных конечно-сходящихся алгоритмов настройки параметров [18, 19]. Отметим, что данная задача (при ограниченных возмущающих воздействиях) значительно более сложная, чем задача (1), поскольку изменения динамических процессов рассматриваются в зависимости от уровня помех. Отметим также, что алгоритм параметрического оценивания может быть выбран в известном робастном виде [19] с учетом дополнительных предположений о существовании ряда ограничений.

**Устойчивость системы при ограниченных внешних возмущениях.** Примем в качестве функции Ляпунова (ФЛ) $V(\mathbf{x})$ функцию $V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^*\mathbf{x}$, где символ „*“ означает операцию транспонирования, и посредством выбора регулируемых параметров в системе (2) обеспечим выполнение условия асимптотической устойчивости на траекториях исследуемого процесса: $\dot{V}(\mathbf{x}) = dV(\mathbf{x})/dt < 0$. Проецируя уравнение (2) на вектор (ось) $2\mathbf{x}$, получаем

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = 2\mathbf{x}^*\mathbf{f}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\sigma}, t) + 2\mathbf{x}^*\mathbf{v}(t). \tag{3}$$

Введем следующие обозначения для скалярных функций:

$$\psi(\mathbf{x}, \boldsymbol{\sigma}, t) \equiv 2\mathbf{x}^*\mathbf{f}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\sigma}, t), \qquad \lambda(\mathbf{x}, t) \equiv 2\mathbf{x}^*\mathbf{v}(t),$$

где $\psi(0, \boldsymbol{\sigma}, t) = 0$, $\lambda(0, t) = 0$. Тогда уравнение (3) примет следующий вид:

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = \psi(\mathbf{x}, \boldsymbol{\sigma}, t) + \lambda(\mathbf{x}, t); \tag{4}$$

полагаем при этом включение элементов вектора $\boldsymbol{\sigma}$ в функцию $\psi(\mathbf{x}, \boldsymbol{\sigma}, t)$ линейным, т.е. считаем, что имеет место соотношение

$$\psi(\mathbf{x}, \boldsymbol{\sigma}, t) = \mathbf{g}^*(\mathbf{x}, t)\boldsymbol{\sigma} + p(\mathbf{x}, t), \qquad \mathbf{g}(\mathbf{x}, t) \equiv \nabla_\sigma \psi(\mathbf{x}, \boldsymbol{\sigma}, t),$$

где $p(\mathbf{x}, t)$ — некоторая гладкая по $\mathbf{x}$ и $t$ скалярная функция; $\nabla_\sigma \psi(\cdot)$ — вектор градиента от функции $\psi$ по элементам вектора $\boldsymbol{\sigma}$; $\mathbf{g}(\mathbf{x}, t) \in R^m$.

Предположим далее, что $\forall \tilde{\boldsymbol{\sigma}}$, $\boldsymbol{\sigma} \in \Sigma$, можно указать константу $C_\sigma$, для которой выполняется неравенство

$$(\nabla_\sigma \psi(\mathbf{x}, \boldsymbol{\sigma}, t), \tilde{\boldsymbol{\sigma}} - \boldsymbol{\sigma}) \ge C_\sigma (\nabla_\sigma \psi(\mathbf{x}, \boldsymbol{\sigma}, t), \boldsymbol{\sigma})$$

или

$$\mathbf{g}^*(\mathbf{x}, t)(\tilde{\boldsymbol{\sigma}} - \boldsymbol{\sigma}) \ge C_\sigma \mathbf{g}^*(\mathbf{x}, t)\boldsymbol{\sigma}, \tag{5}$$

где запись $(\mathbf{a},\mathbf{b})$ означает скалярное произведение для произвольных векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$.

В теории адаптивных систем для целевых функций $\varphi(\cdot)$ (в данном случае в этой роли выступает функция $\psi(\cdot)+\lambda(\cdot)$) при использовании градиентных алгоритмов оценивания справедливо условие вогнутости [7]:

$$(\nabla_{\sigma}\varphi(\mathbf{x},\boldsymbol{\sigma},t),\tilde{\boldsymbol{\sigma}}-\boldsymbol{\sigma})\geq\varphi(\mathbf{x},\tilde{\boldsymbol{\sigma}},t)-\varphi(\mathbf{x},\boldsymbol{\sigma},t)\geq\Delta,\quad \Delta\geq 0. \qquad (6)$$

Достаточно естественное условие (5) (с учетом нормы разности двух векторов) в рассматриваемой задаче будет являться альтернативой условию вогнутости (6), так как определенно сказать, удовлетворяет ли функция $\psi(\mathbf{x},\boldsymbol{\sigma},t)+\lambda(\mathbf{x},t)$ в соотношении (4) условию вогнутости по $\boldsymbol{\sigma}$ или нет, нельзя из-за отсутствия информации о структуре вектор-функции $\mathbf{v}(t)$.

В качестве целевой функции в дифференциальной системе (3) выберем функцию

$$\varphi(\mathbf{x},\dot{\mathbf{x}},t)=-\dot{V}(\mathbf{x})-\varepsilon_1\|\mathbf{g}(\mathbf{x},t)\|+\varepsilon_2, \qquad (7)$$

где $\dot{V}(\mathbf{x})=d(\mathbf{x}^*\mathbf{x})/dt=2\mathbf{x}^*\dot{\mathbf{x}}$; $\varepsilon_1$, $\varepsilon_2$ — некоторые положительные постоянные, выбираемые в дальнейшем исходя из условий конечной сходимости алгоритма параметрической настройки.

Задача, таким образом, заключается в решении относительно вектора $\boldsymbol{\sigma}$ целевого неравенства $\varphi(\mathbf{x},\dot{\mathbf{x}},t)=\varphi(\mathbf{x},\boldsymbol{\sigma},t)>0$ для функции $\varphi(\cdot)$ (7):

$$\varphi(\mathbf{x},\boldsymbol{\sigma},t)=-[\mathbf{g}^*(\mathbf{x},t)\boldsymbol{\sigma}+p(\mathbf{x},t)+\lambda(\mathbf{x},t)]-\varepsilon_1\|\mathbf{g}(\mathbf{x},t)\|+\varepsilon_2. \qquad (8)$$

Видно, что обеспечение целевого неравенства гарантирует выполнение требования об ограничении скорости изменения ФЛ $V(\mathbf{x})$ по времени:

$$\dot{V}(\mathbf{x})<-\varepsilon_1\|\mathbf{g}(\mathbf{x},t)\|+\varepsilon_2 \qquad (9)$$

в предположении равномерной ограниченности вектор-функции $\mathbf{g}(\mathbf{x},t)$.

**Результат.** Для доказательства наличия диссипативных свойств (асимптотической устойчивости) у данной параметрически настраиваемой (регулируемой) системы предположим, что $\exists\,\varepsilon_3>0$ — константа, для которой при $\forall t\in[0,\infty)$ выполняется неравенство

$$\|\mathbf{g}(\mathbf{x},t)\|\geq\varepsilon_3 V(\mathbf{x}). \qquad (10)$$

Соотношение (10) с учетом равномерной ограниченности $\mathbf{g}(\mathbf{x},t)$ означает также и равномерную ограниченность ФЛ $V(\mathbf{x})$, и возможность (в силу того, что $\|\mathbf{g}(\mathbf{x},t)\|=\|\nabla_{\sigma}(2\mathbf{x}^*\mathbf{f}(\mathbf{x},\boldsymbol{\sigma},t))\|$) линеаризации по $\mathbf{x}$ функции $\mathbf{f}(\cdot)$ в уравнении (2) в рассматриваемой ограниченной области. Тогда, очевидно, неравенство (9) может быть усилено неравенством

$$\dot{V}(\mathbf{x})<-\varepsilon_1\varepsilon_3 V(\mathbf{x})+\varepsilon_2. \qquad (11)$$

Перейдем к записи процедуры получения оценок $\boldsymbol{\sigma}_n$ вектора $\boldsymbol{\sigma}$ и доказательству ее конечной сходимости. Зададим алгоритм параметрической настройки в виде соотношения

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1}=\boldsymbol{\sigma}_n-\frac{k\theta_n\mathbf{g}(\mathbf{x}_n,t_n)}{\|\mathbf{g}(\mathbf{x}_n,t_n)\|^2}, \qquad (12)$$

где

$$\theta_n=\begin{cases}1, \text{если } \varphi(\mathbf{x}_n,\boldsymbol{\sigma}_n,t_n)\leq 0 \text{ либо } \dot{V}(\mathbf{x}_n)\geq-\varepsilon_1\|\mathbf{g}(\mathbf{x}_n,t_n)\|+\varepsilon_2;\\ 0, \text{если } \varphi(\mathbf{x}_n,\boldsymbol{\sigma}_n,t_n)>0 \text{ либо } \dot{V}(\mathbf{x}_n)<-\varepsilon_1\|\mathbf{g}(\mathbf{x}_n,t_n)\|+\varepsilon_2,\end{cases}$$

причем $\varepsilon_1$, $\varepsilon_2>0$; $k>0$ — произвольная постоянная; $\mathbf{g}(\mathbf{x}_n,t_n)=-\nabla_{\sigma_n}\varphi(\mathbf{x}_n,\boldsymbol{\sigma}_n,t_n)$; $\|\mathbf{g}(\mathbf{x}_n,t_n)\|\leq C_g$, $C_g>0$ — некоторая положительная постоянная; здесь $n=1,2,...,$ — шаг алгоритма; $\boldsymbol{\sigma}_1$ — начальный вектор; $\mathbf{x}_n=\mathbf{x}(t_n)$ — измеряемый вектор состояния; $\boldsymbol{\sigma}_n$ —

кусочно-постоянная вектор-функция времени: $\boldsymbol{\sigma}_n = \boldsymbol{\sigma}_t$, $t \in [t_n, t_{n+1})$, где $t_{n+1}$ — момент времени, когда впервые после условия $t_n + \delta$, $\delta > 0$, нарушается целевое неравенство $\varphi(\mathbf{x}_n, \boldsymbol{\sigma}_n, t_n) > 0$.

Сформулируем теорему, определяющую условия конечной сходимости алгоритма получения оценок вектора параметров $\boldsymbol{\sigma}$ (12).

**Теорема.** Пусть выполнены следующие условия:

1) целевая функция $\varphi(\mathbf{x}, \boldsymbol{\sigma}, t)$ равномерно ограничена по $\mathbf{x}$, $t$ и дифференцируема по $\boldsymbol{\sigma}$ $\forall \mathbf{x}$, $\forall t$, $\|\mathbf{g}(\mathbf{x}, t)\| \le C_g$;

2) $\exists \boldsymbol{\sigma}' \in \Sigma \subset R^m$ — вектор, для которого справедливы неравенства

$$\varphi(\mathbf{x}, \boldsymbol{\sigma}_*, t) \ge \varepsilon' > 0 \qquad \forall \mathbf{x}, \forall t, \tag{13}$$

где $\varepsilon'$ — некоторое положительное достаточно малое число;

3) справедливы неравенства (5) и (10).

Тогда построенная с помощью алгоритма (12) последовательность векторов $\boldsymbol{\sigma}_n$ монотонно приближается к вектору $\boldsymbol{\sigma}$. Алгоритм (12) сходится за конечное число шагов, т.е. $\exists\ t' > 0$ — момент времени, такой что $\forall t \ge t'$ выполняется равенство $\boldsymbol{\sigma}_t = \boldsymbol{\sigma}_{t'}$, и, начиная с этого момента, $\varphi(\mathbf{x}, \boldsymbol{\sigma}, t) > 0.$ Для числа коррекций $\rho$ вектора $\boldsymbol{\sigma}_n$ справедлива оценка

$$\rho \le \|\boldsymbol{\sigma}_1 - \boldsymbol{\sigma}\|^2 h; \qquad h \equiv \frac{C_g^2}{2kC_\sigma \varepsilon'}, \tag{14}$$

где $\boldsymbol{\sigma}_1 \in \Sigma$ — произвольный начальный вектор.

***Доказательство.*** Будем считать, что на некотором $n$-м шаге алгоритма (12) выполнено неравенство $\varphi(\mathbf{x}_n, \boldsymbol{\sigma}_n, t_n) \le 0$. Тогда из соотношения (12), возводя члены последовательно в квадрат, с учетом выражений (4)—(8) получаем

$$\|\boldsymbol{\sigma}_{n+1} - \boldsymbol{\sigma}\|^2 \le \|\boldsymbol{\sigma}_n - \boldsymbol{\sigma}\|^2 - \frac{2k\theta_n(\boldsymbol{\sigma}_n - \boldsymbol{\sigma}, \mathbf{g})}{\|\mathbf{g}\|^2} + \frac{k^2\theta_n}{\|\mathbf{g}\|^2} =$$

$$= \|\boldsymbol{\sigma}_n - \boldsymbol{\sigma}\|^2 - \frac{2k\theta_n \mathbf{g}^*(\boldsymbol{\sigma}_n - \boldsymbol{\sigma})}{\|\mathbf{g}\|^2} + \frac{k^2\theta_n}{\|\mathbf{g}\|^2} \le \|\boldsymbol{\sigma}_n - \boldsymbol{\sigma}\|^2 - \frac{2k\theta_n C_\sigma \mathbf{g}^* \boldsymbol{\sigma}}{\|\mathbf{g}\|^2} + \frac{k^2\theta_n}{\|\mathbf{g}\|^2} =$$

$$= \|\boldsymbol{\sigma}_n - \boldsymbol{\sigma}\|^2 - \frac{2k\theta_n C_\sigma(\dot{V} - p - \lambda)}{\|\mathbf{g}\|^2} + \frac{k^2\theta_n}{\|\mathbf{g}\|^2} \le \|\boldsymbol{\sigma}_n - \boldsymbol{\sigma}\|^2 - \frac{2k\theta_n C_\sigma \dot{V}}{\|\mathbf{g}\|^2} + \frac{2k\theta_n C_\sigma(p + \lambda)}{\|\mathbf{g}\|^2} + \frac{k^2\theta_n}{\|\mathbf{g}\|^2}. \tag{15}$$

Здесь следует напомнить о равномерной ограниченности целевой функции $\varphi(\cdot)$. С учетом этого имеем: $|p + \lambda| \le C_p + C_\lambda C_v$, где $C_p$, $C_\lambda$ — некоторые известные положительные постоянные, не зависящие от $x$ и $t$. Тогда неравенство (15) можно продолжить $(-\dot{V} \le \varepsilon_1\|\mathbf{g}\| - \varepsilon_2)$:

$$\|\boldsymbol{\sigma}_{n+1} - \boldsymbol{\sigma}\|^2 \le \|\boldsymbol{\sigma}_n - \boldsymbol{\sigma}\|^2 -$$

$$- \frac{2k\theta_n C_\sigma \dot{V}}{\|\mathbf{g}\|^2} + \frac{2k\theta_n C_\sigma(C_p + C_\lambda C_v)}{\|\mathbf{g}\|^2} + \frac{k^2\theta_n}{\|\mathbf{g}\|^2} \le \|\boldsymbol{\sigma}_n - \boldsymbol{\sigma}\|^2 + \frac{2k\theta_n C_\sigma(\varepsilon_1\|\mathbf{g}\| - \varepsilon_2)}{\|\mathbf{g}\|^2} +$$

$$+ \frac{2k\theta_n C_\sigma(C_p + C_\lambda C_v)}{\|\mathbf{g}\|^2} + \frac{k^2\theta_n}{\|\mathbf{g}\|^2} \le \|\boldsymbol{\sigma}_n - \boldsymbol{\sigma}\|^2 + \frac{2k\theta_n C_\sigma(\varepsilon_1 C_g - \varepsilon_2)}{\|\mathbf{g}\|^2} +$$

$$+ \frac{2k\theta_n C_\sigma(C_p + C_\lambda C_v)}{\|\mathbf{g}\|^2} + \frac{k^2\theta_n}{\|\mathbf{g}\|^2} =$$

$$= \|\boldsymbol{\sigma}_n - \boldsymbol{\sigma}\|^2 - \frac{k^2\theta_n}{\|\mathbf{g}\|^2}\left[\frac{2C_\sigma(\varepsilon_2 - \varepsilon_1 C_g)}{k} - \frac{2C_\sigma(C_p + C_\lambda C_v)}{k} - 1\right] \le$$

$$\leq \|\boldsymbol{\sigma}_n - \boldsymbol{\sigma}\|^2 - \frac{2k\theta_n C_\sigma}{C_g^2}\left(\varepsilon_2 - \varepsilon_1 C_g - C_p - C_\lambda C_v - \frac{k}{2C_\sigma}\right). \quad (16)$$

Путем выбора постоянных $\varepsilon_1$ и $\varepsilon_2$ обеспечим, чтобы суммарная константа, стоящая в скобках, была положительной. Очевидно, этого можно достичь, учитывая, что $\varepsilon_1 > 0$, а $\varepsilon_2$ выбирая из условия

$$\varepsilon_2 > \varepsilon_1 C_g + C_p + C_\lambda C_v + \frac{k}{2C_\sigma} \equiv C_\varepsilon,$$

где все константы в правой части неравенства положительны; обратим внимание на то, что константа $C_\varepsilon$ пропорциональна уровню помех $C_v$.

Примем далее

$$\varepsilon_2 = C_\varepsilon + \varepsilon'\theta_n, \quad (17)$$

тогда неравенство (16) можно записать как

$$\|\boldsymbol{\sigma}_{n+1} - \boldsymbol{\sigma}\|^2 \leq \|\boldsymbol{\sigma}_n - \boldsymbol{\sigma}\|^2 - \frac{2k\theta_n C_\sigma \varepsilon'}{C_g^2}. \quad (18)$$

Суммируя неравенство (18) по $n$ от 1 до $N$, получаем

$$\|\boldsymbol{\sigma}_{N+1} - \boldsymbol{\sigma}\|^2 \leq \|\boldsymbol{\sigma}_1 - \boldsymbol{\sigma}\|^2 - \frac{2kC_\sigma \varepsilon'}{C_g^2}\sum_{n=1}^{N}\theta_n. \quad (19)$$

Чтобы доказать конечную сходимость предлагаемого алгоритма параметрического оценивания, предположим, что при $\varphi(\mathbf{x}_n, \boldsymbol{\sigma}_n, t_n) \leq 0$ имеет место неравенство

$$\|\boldsymbol{\sigma}_{n+1} - \boldsymbol{\sigma}\|^2 \leq \|\boldsymbol{\sigma}_n - \boldsymbol{\sigma}\|^2 - \delta_n, \quad (20)$$

где $\sum_{n=1}^{\infty}\delta_n \to \infty$.

Структура неравенств (20) и (18) полностью совпадает, если

$$\delta_n = \frac{2k\theta_n C_\sigma \varepsilon'}{C_g^2}.$$

Легко показать, что условие $\varphi(\mathbf{x}_n, \boldsymbol{\sigma}_n, t_n) \leq 0$ выполняется не более чем для конечного числа $\rho_n$ троек $(\mathbf{x}_n, \boldsymbol{\sigma}_n, t_n)$, причем для этого числа $\rho_n$ имеем очевидную оценку: $\rho_n \leq s$, где $s$ — наименьшее целое, для которого справедливо неравенство

$$\sum_{n=1}^{s}\delta_n \geq \|\boldsymbol{\sigma}_1 - \boldsymbol{\sigma}\|^2. \quad (21)$$

Действительно, суммируя неравенство (20) по $i = \overline{1, n}$, получаем

$$\|\boldsymbol{\sigma}_{n+1} - \boldsymbol{\sigma}\|^2 \leq \|\boldsymbol{\sigma}_1 - \boldsymbol{\sigma}\|^2 - \sum_{i=1}^{n}\delta_i. \quad (22)$$

Так как $\sum_{n=1}^{\infty}\delta_n \to \infty$ при $n \to \infty$, то неравенство (22) при достаточно большом $n$ становится противоречивым. В качестве числа $s$ возьмем $n$, для которого выполняется неравенство (21). Тем самым получим утверждение теоремы о конечной сходимости алгоритма оценивания (12). Оценка (14) числа $\rho$ изменений вектора $\boldsymbol{\sigma}_n$ непосредственно следует из неравенства (19). ■

Замечания. 1. Неравенства (13) указывают на то, что целевое неравенство $\varphi(\mathbf{x}, \boldsymbol{\sigma}, t) > 0$ разрешимо в усиленном смысле, а именно: $\exists \sigma' \in \Sigma \subset R^m$ — вектор, удовлетворяющий неравенствам (13) с некоторым запасом, т.е. множество решений этих неравенств представляет собой открытое множество.

2. В результате конечной сходимости алгоритма (12) достигается целевое неравенство (9): $\dot{V}(\mathbf{x}) < -\varepsilon_1 \|\mathbf{g}(\mathbf{x}, t)\| + \varepsilon_2$.

3. Согласно доказанной теореме при выполнении неравенств (9) и (10) имеет место соотношение (11), откуда в силу решения линейного по $V(\mathbf{x})$ дифференциального неравенства (11) следует диссипативность настраиваемой системы (2), (12) и оценка области притяжения

$$\lim_{t \to \infty} V[\mathbf{x}(t)] \le \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1 \varepsilon_3},$$

пропорциональная уровню возмущений $C_v$.

**Модельный пример.** Рассмотрим нелинейную динамическую систему, заданную уравнениями

$$\dot{y} = z + \sigma y - y^5, \qquad \dot{z} = -y - z^5,$$

на движение которой накладываются внешние ограниченные синусоидальные возмущения $\mathbf{v}(t)$. Результатом является следующая векторная система:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \sigma) + \mathbf{v}(t),$$

где

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}(\mathbf{x}, \sigma) = \begin{pmatrix} x_2 + \sigma x_1 - x_1^5 \\ -x_1 - x_2^5 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}(t) = \begin{pmatrix} \sin t \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Данная система может служить моделью сложной нелинейной упругой системы с трением. Здесь $\sigma$ — некоторый параметр, выбираемый исходя из целевого условия обеспечения устойчивости.

Требуется путем регулирования параметра $\sigma$ привести исходную систему в асимптотически устойчивое состояние. При моделировании процесса движения системы будем опираться на предложенную алгоритмическую схему настройки параметра $\sigma$. Имеем:

$$V(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2, \qquad \dot{V} = \psi + \lambda, \qquad \lambda(\mathbf{x}, t) = 2x_1 \sin t;$$

$$\psi(\mathbf{x}, \sigma, t) = 2(\sigma x_1^2 - x_1^6 - x_2^6) = \mathrm{g}(\mathbf{x}, t)\sigma + p(\mathbf{x}, t),$$

$$g(\mathbf{x}, t) = 2x_1^2, \qquad p(\mathbf{x}, t) = -2(x_1^6 + x_2^6).$$

Неравенство (5) тождественно неравенству для выбора константы $C_\sigma$: $0 < C_\sigma \le (\tilde{\sigma} - \sigma)/\sigma$, $\tilde{\sigma} > \sigma$. Последовательно получим:

1) целевую функцию (7):

$$\varphi(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t) = -\dot{V} - \varepsilon_1 2x_1^2 + \varepsilon_2, \qquad \|g(\mathbf{x}, t)\| = 2x_1^2;$$

2) в неравенстве (10) следующее выражение:

$$\sqrt{\frac{2 - \varepsilon_3}{\varepsilon_3}} > \frac{x_2}{x_1}, \qquad 0 < \varepsilon_3 < 2;$$

3) алгоритм параметрического оценивания (12):

$$\sigma_{n+1} = \sigma_n - \frac{k\theta_n}{2x_{1n}^2}.$$

Были приняты следующие числовые данные: $k = 7$, $x_{10} = 1$, $x_{20} = 1$, $\sigma_0 = 2$, $\varepsilon_1 = 10^{-3}$, $\varepsilon_2 = 0{,}1$.

На рис. 1 и 2 представлены фазовые траектории и расчетное значение ФЛ $V(\mathbf{x})$: *1* — для фиксированного значения $\sigma = 2$, *2* — для случая настройки параметра $\sigma$. На рис. 3 приведен график $\sigma_n$ для первых 40 шагов настройки.

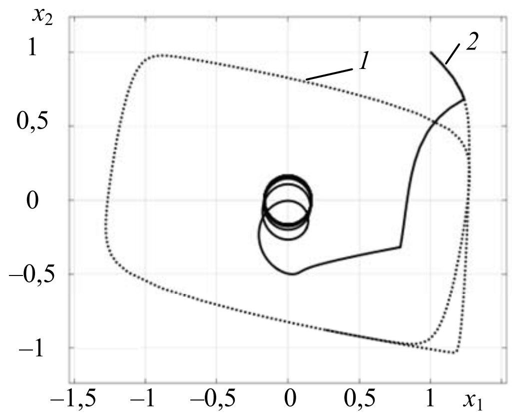


*Рис. 1*

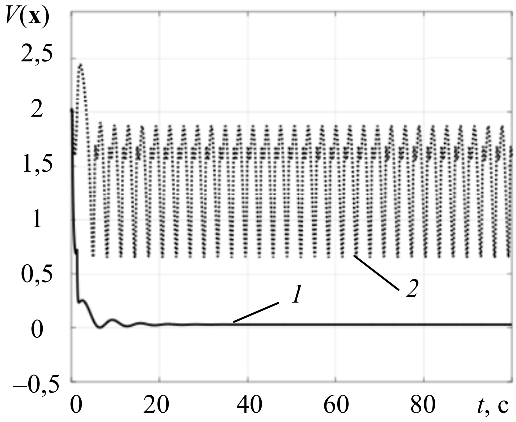


*Рис. 2*

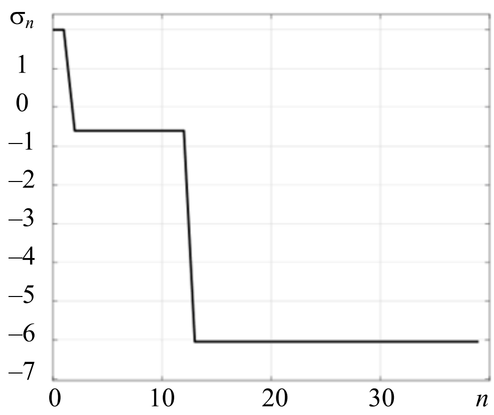


*Рис. 3*

Результаты компьютерного моделирования полностью подтверждают теоретические выводы о сходимости значений $\sigma_n$ к $\sigma$, а также о диссипативных (устойчивых) свойствах исходной динамической системы в зависимости от уровня возмущений.

**Заключение.** Разработан алгоритмический метод приведения в устойчивое состояние нелинейных динамических систем с учетом ограниченных детерминированных возмущающих воздействий. Решение задачи найдено путем регулирования параметров системы с помощью робастного конечно-сходящегося алгоритма оценивания.

Статья подготовлена по результатам работы, выполненной при финансовой поддержке Президента Российской Федерации, грант №14.Y31.16.9281-НШ.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Руш П., Абетс П., Лалуа М.* Прямой метод Ляпунова в теории устойчивости. М.: Мир, 1980.
2. *Беллман Р.* Теория устойчивости решений дифференциальных уравнений. М.: Едиториал УРСС, 2003.
3. *Алфутов Н. А., Колесников К. С.* Устойчивость движения и равновесия. М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2003.
4. *Zadeh L. A., Desoer C. A.* Linear System Theory: the State Space Approach. N. Y.: Dover Publications, 2008.
5. *Liu J., Teel A.* Lyapunov based sufficient conditions for stability of hybrid systems with memory // IEEE Trans. on Automat. Control. 2016. Vol. 61, N 4. P. 1057—1062.
6. *Clarke F. H., Stern R. J.* Lyapunov and feedback characterizarions of state constrained controllability and stabilization // Systems & Control Letters. 2005. Vol. 54, N 8. P. 747—752.
7. *Фомин В. Н., Фрадков А. Л., Якубович В. А.* Адаптивное управление динамическими объектами. М.: Наука, 1981.
8. Справочник по теории автоматического управления / Под ред. *А. А. Красовского*. М.: Наука, 1987.
9. *Фрадков А. Л.* Адаптивное управление в сложных системах. М.: Наука, 1990.
10. *Андерсон Б., Битмид Р., Джонсон К.* и др. Устойчивость адаптивных систем. М.: Мир, 1989.
11. *Мирошник И. В., Никифоров В. О., Фрадков А. Л.* Нелинейное и адаптивное управление сложными динамическими системами. СПб: Наука, 2000.
12. *Marino R., Tomei P.* Nonlinear Control Design: Geometric, Adaptive and Robust. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1995.
13. *Isidori A.* Nonlinear Control System. London: Springer, 1995.
14. *Ioannou P. A., Sun J.* Robust Adaptive Control. Engewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1996.
15. *Narendra K. S., Annaswamy A. M.* Stable Adaptive Systems. N. Y.: Dover Publication, 2012.
16. *Raissi T., Ramdani N., Candau Y.* Set membership state and parameter estimation for systems described by nonlinear differential equations // Automatica. 2004. Vol. 40, N 10. P. 1771—1777.
17. *Grip H., Johansen T., Imsland L., Kaasa G.-O.* Parameter estimation and compensation in systems with nonlinearly parameterized perturbations // Automatica. 2010. Vol. 46, N 1. P. 19—28.
18. *Тертычный-Даури В. Ю.* Адаптивная механика. М.: Наука, 1998.
19. *Ведяков А. А., Тертычный-Даури В. Ю.* Робастные алгоритмы параметрического оценивания в некоторых задачах обеспечения устойчивости // Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики. 2016. Т. 16, № 4. С. 620—626.

***Сведения об авторах***

***Алексей Алексеевич Ведяков*** — канд. техн. наук; Университет ИТМО, кафедра систем управления и информатики; Email: vedyakov@corp.ifmo.ru

***Владимир Юрьевич Тертычный-Даури*** — д-р физ.-мат. наук, профессор; Университет ИТМО, кафедра высшей математики; Email: tertychny-dauri@mail.ru

Рекомендована кафедрой
систем управления и информатики
и кафедрой высшей математики

Поступила в редакцию
25.02.17 г.

**Ссылка для цитирования:** *Ведяков А. А., Тертычный-Даури В. Ю.* Обеспечение устойчивости динамических систем при ограниченных возмущающих воздействиях // Изв. вузов. Приборостроение. 2017. Т. 60, № 7. С. 603—611.

**ENSURING DYNAMIC SYSTEM STABILITY UNDER CONSTRAINED PERTURBATIONS IMPACT**

**A. A. Vedyakov, V. Yu. Tertychny-Dauri**

*ITMO University, 197101, St. Petersburg, Russia*
*E-mail: tertychny-dauri@mail.ru*

The problem of ensuring asymptotic stability of nonlinear dynamic system by means of tuning its parameters is considered for the case when the system is subject to constrained external perturbations. A solution to the problem is found with the use of a robust finitely convergent algorithm of parameters setting. An estimate of attraction domain proportional to the perturbation level is derived.

**Keywords:** dynamic system, constrained perturbation, target inequality, finitely convergent algorithm

***Data on authors***

| | | |
|---|---|---|
| ***Alexey A. Vedyakov*** | — | PhD; ITMO University, Department of Control Systems and Informatics; E-mail: vedyakov@corp.ifmo.ru |
| ***Vladimir Yu. Tertychny-Dauri*** | — | Dr. Sci., Professor; ITMO University, Department of Higher Mathematics; E-mail: tertychny-dauri@mail.ru |

**For citation**: Vedyakov A. A., Tertychny-Dauri V. Yu. Ensuring dynamic system stability under constrained perturbations impact. *Journal of Instrument Engineering*. 2017. Vol. 60, N 7. P. 603—611 (in Russian).

DOI: 10.17586/0021-3454-2017-60-7-603-611