

АНАЛИЗ КОМПЛЕКСНЫХ ФИЛЬТРОВ НА ОСНОВЕ ПЕРЕХОДНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК

С. И. ЗИАТДИНОВ, Ю. В. СОКОЛОВА

Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения,
190000, Санкт-Петербург, Россия
E-mail: kaf53@guap.ru

Разработана методика исследования комплексных фильтров с использованием переходных характеристик. Путем представления комплексного входного сигнала в виде суммы сдвинутых относительно друг друга ступенчатых воздействий получена новая форма комплексного интеграла наложения, позволяющая при заданном комплексном входном сигнале и известной комплексной переходной характеристике фильтра найти его выходной сигнал. Показано, что использование комплексных фильтров позволяет легко менять их частоту настройки без изменения формы амплитудно- и фазочастотных характеристик. Введены понятия комплексной дельта-функции и комплексной переходной характеристики, используемые при исследовании динамических свойств фильтров и анализе передачи через них разнообразных сигналов. В отличие от известного метода анализа линейных систем на основе импульсной характеристики предложенная методика позволяет синтезировать комплексные дискретные фильтры, динамические свойства которых совпадают с динамическими свойствами непрерывных фильтров—аналогов. Выдвинутые теоретические положения подтверждены конкретными примерами.

Ключевые слова: комплексный сигнал, комплексный фильтр, комплексная импульсная характеристика, комплексная переходная характеристика, интеграл наложения

Введение. При обработке информации наиболее часто используется процедура фильтрации сигналов с помощью фильтров нижних и верхних частот, полосовых и режекторных фильтров. В ряде случаев применяются адаптивные и комплексные фильтры, параметры которых могут изменяться в зависимости от спектральных характеристик обрабатываемых сигналов. В комплексных фильтрах управлять средней частотой передаточной функции фильтра значительно проще, чем в действительных фильтрах.

В настоящее время теория исследования прохождения сигнала через разнообразные фильтры достаточно хорошо разработана [1—11].

Исчерпывающей характеристикой фильтра является его частотно-передаточная функция. Для анализа фильтров используются два основных метода — частотный и временной. В случае частотного метода исследования линейной системы с частотной передаточной функцией $W(j\omega)$ комплексный выходной сигнал $z_{\text{ВЫХ}}(t)$ при известной спектральной плотности $z_{\text{ВХ}}(j\omega)$ комплексного входного сигнала $z_{\text{ВХ}}(t)$ определяется на основании обратного преобразования Фурье [1, 2]:

$$z_{\text{ВЫХ}}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W(j\omega) z_{\text{ВХ}}(j\omega) e^{j\omega t} d\omega.$$

При использовании временного метода анализа комплексных фильтров с импульсной характеристикой $h^*(t)$ применяется интеграл наложения (интеграл Дюамеля) [2, 3]:

$$z_{\text{ВЫХ}}(t) = \int_0^{\infty} z_{\text{ВХ}}(t - \tau) h^*(\tau) d\tau, \quad (1)$$

где комплексные входной $z_{\text{ВХ}}(t)$ и выходной $z_{\text{ВЫХ}}(t)$ сигналы, а также комплексная импульсная характеристика $h^*(t)$ определяются как

$$z_{\text{ВХ}}(t) = x_{\text{ВХ}}(t) + jy_{\text{ВХ}}(t); \quad z_{\text{ВЫХ}}(t) = x_{\text{ВЫХ}}(t) + jy_{\text{ВЫХ}}(t), \quad h^*(t) = h_x(t) + jh_y(t). \quad (2)$$

В соотношениях (2) $x_{\text{ВХ}}(t)$ и $y_{\text{ВХ}}(t)$ — квадратурные (комплексно-сопряженные) составляющие входного сигнала; $x_{\text{ВЫХ}}(t)$ и $y_{\text{ВЫХ}}(t)$ — квадратурные составляющие выходного сигнала; $h_x(t)$ и $h_y(t)$ — квадратурные составляющие импульсной характеристики комплексного фильтра.

В работах [4—6] показано, что при переходе от непрерывных фильтров к дискретным существующая методика расчетов коэффициентов разностных уравнений на основе отсчетов импульсных характеристик не обеспечивает правильной реализации переходных процессов. При этом методика расчетов коэффициентов с использованием отсчетов переходных характеристик позволяет получить динамические свойства дискретных фильтров, совпадающие с динамическими свойствами непрерывных фильтров как в переходном, так и в установившемся режиме.

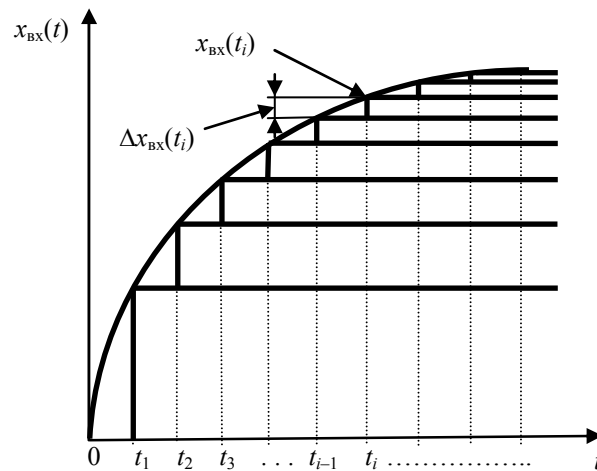
В этих условиях возникает актуальная задача разработки методики анализа фильтров на основе их переходных характеристик. Решение данной задачи составляет основное содержание настоящей статьи.

Интеграл наложения с использованием комплексных переходных характеристик.

Для решения поставленной задачи составляющие $x_{\text{ВХ}}(t)$ и $y_{\text{ВХ}}(t)$ комплексного входного сигнала $z_{\text{ВХ}}(t)$ представим в виде суммы последовательности ступенчатых функций, начинающихся в моменты времени t_1, t_2, \dots, t_n (на рисунке показан сигнал $x_{\text{ВХ}}(t)$):

$$\begin{aligned} x_{\text{ВХ}}(t) &= [x_{\text{ВХ}}(t-t_1) - x_{\text{ВХ}}(t-t_0)] + [x_{\text{ВХ}}(t-t_2) - x_{\text{ВХ}}(t-t_1)] + \dots \\ &+ [x_{\text{ВХ}}(t-t_i) - x_{\text{ВХ}}(t-t_{i-1})] + \dots = \Delta x_{\text{ВХ}}(t_1) + \Delta x_{\text{ВХ}}(t_2) + \dots + \Delta x_{\text{ВХ}}(t_i) + \dots; \\ y_{\text{ВХ}}(t) &= [y_{\text{ВХ}}(t-t_1) - y_{\text{ВХ}}(t-t_0)] + [y_{\text{ВХ}}(t-t_2) - y_{\text{ВХ}}(t-t_1)] + \dots \\ &+ [y_{\text{ВХ}}(t-t_i) - y_{\text{ВХ}}(t-t_{i-1})] + \dots = \Delta y_{\text{ВХ}}(t_1) + \Delta y_{\text{ВХ}}(t_2) + \dots + \Delta y_{\text{ВХ}}(t_i) + \dots, \end{aligned}$$

где $\Delta x_{\text{ВХ}}(t_i) = x_{\text{ВХ}}(t-t_i) - x_{\text{ВХ}}(t-t_{i-1})$, $\Delta y_{\text{ВХ}}(t_i) = y_{\text{ВХ}}(t-t_i) - y_{\text{ВХ}}(t-t_{i-1})$ — элементарные ступенчатые функции, возникающие в момент времени $t = t_i$.



При этом комплексный входной сигнал определяется выражением

$$z_{\text{ВХ}}(t) = \sum_{i=1}^{\infty} \Delta x_{\text{ВХ}}(t_i) + j \sum_{i=1}^{\infty} \Delta y_{\text{ВХ}}(t_i).$$

В результате комплексный выходной сигнал фильтра будет определяться соотношением

$$z_{\text{ВЫХ}}(t) = \left[\sum_{i=1}^{\infty} \Delta x_{\text{ВХ}}(t_i) + j \sum_{i=1}^{\infty} \Delta y_{\text{ВХ}}(t_i) \right] g^*(t-t_i), \quad (3)$$

где $g^*(t)$ — комплексная переходная характеристика, являющаяся реакцией фильтра на комплексное ступенчатое входное воздействие $\Delta z_{\text{ВХ}}(t) = \Delta x_{\text{ВХ}}(t) + j\Delta y_{\text{ВХ}}(t)$.

Переходная характеристика комплексного фильтра находится из соотношения

$$g^*(t) = \int_0^t h^*(\tau) d\tau.$$

С учетом того, что $h^*(t) = h_x(t) + jh_y(t)$, комплексная переходная характеристика $g^*(t)$ записывается через квадратурные составляющие $g^*(t) = g_x(t) + jg_y(t)$, где

$$g_x(t) = \int_0^t h_x(\tau) d\tau, \quad g_y(t) = \int_0^t h_y(\tau) d\tau.$$

В результате выражение (3) приобретает следующий вид:

$$\begin{aligned} z_{\text{ВЫХ}}(t) = & \sum_{i=1}^{\infty} \Delta x_{\text{ВХ}}(t_i) g_x(t-t_i) - \sum_{i=1}^{\infty} \Delta y_{\text{ВХ}}(t_i) g_y(t-t_i) + \\ & + j \left[\sum_{i=1}^{\infty} \Delta x_{\text{ВХ}}(t_i) g_y(t-t_i) + \sum_{i=1}^{\infty} \Delta y_{\text{ВХ}}(t_i) g_x(t-t_i) \right]. \end{aligned} \quad (4)$$

Пусть отсчеты квадратурных составляющих входного сигнала $x_{\text{ВХ}}(t_i)$ и $y_{\text{ВХ}}(t_i)$ при формировании ступенчатых функций берутся через одинаковые отрезки времени, т. е. $t_i = iT$, где T — период следования отсчетов.

Помножив и поделив выражение (4) на T , получим

$$\begin{aligned} z_{\text{ВЫХ}}(t) = & T \left[\sum_{i=1}^{\infty} \Delta x_{\text{ВХ}}(t_i) g_x(t-t_i) / T - \sum_{i=1}^{\infty} \Delta y_{\text{ВХ}}(t_i) g_y(t-t_i) / T \right] + \\ & + jT \left[\sum_{i=1}^{\infty} \Delta x_{\text{ВХ}}(t_i) g_y(t-t_i) / T + \sum_{i=1}^{\infty} \Delta y_{\text{ВХ}}(t_i) g_x(t-t_i) / T \right]. \end{aligned}$$

В предельном переходе при $T \rightarrow 0$ можно записать:

$$\begin{aligned} z_{\text{ВЫХ}}(t) = & \int_0^t \frac{dx_{\text{ВХ}}(\tau)}{d\tau} g_x(t-\tau) d\tau - \int_0^t \frac{dy_{\text{ВХ}}(\tau)}{d\tau} g_y(t-\tau) d\tau + \\ & + j \left[\int_0^t \frac{dx_{\text{ВХ}}(\tau)}{d\tau} g_y(t-\tau) d\tau + \int_0^t \frac{dy_{\text{ВХ}}(\tau)}{d\tau} g_x(t-\tau) d\tau \right]. \end{aligned} \quad (5)$$

Полученное выражение (5) для выходного сигнала комплексного фильтра является комплексным интегралом наложения, связывающим производные квадратурных составляющих входного сигнала и переходной характеристики фильтра.

Известно [2, 7], что импульсная характеристика линейной системы является производной от переходной характеристики $h^*(t) = \frac{dg^*(t)}{dt}$. Тогда выражение для выходного сигнала фильтра принимает вид

$$z_{\text{ВЫХ}}(t) = \int_0^t z_{\text{ВХ}}(t-\tau) \frac{dg^*(\tau)}{d\tau} d\tau. \quad (6)$$

Таким образом, два равноценных преобразования (5) и (6) позволяют найти выходной сигнал комплексного фильтра при известных комплексных входном сигнале $z_{\text{вх}}(t)$ и переходной характеристике $g^*(t)$.

Для проверки правильности полученных результатов рассмотрим конкретные примеры.

Пример 1. Пусть входной сигнал фильтра является комплексным единичным ступенчатым воздействием $z_{\text{вх}}(t) = 1(t)(\cos \varphi + j \sin \varphi)$, где угол φ может принимать любые значения и, в частности, при $\varphi=0$ входной сигнал становится вещественным.

Для данного сигнала $\frac{dz_{\text{вх}}(t)}{dt} = \delta^*[\cdot] = \delta[\cdot](\cos \varphi + j \sin \varphi)$ — комплексная дельта-функция, после подстановки которой в выражение (5) получим

$$z_{\text{вых}}(t) = \int_0^t \delta^*[0]g^*(t-\tau)d\tau = g^*(t).$$

В результате при комплексном единичном ступенчатом входном воздействии выходной сигнал комплексного фильтра представляет его комплексную переходную характеристику.

Пример 2. Рассмотрим комплексный полосовой фильтр первого порядка с частотной передаточной функцией вида [9]

$$W(j\omega) = \frac{1}{1 + j(\omega - \omega_0)/\omega_{\text{ср}}},$$

где $\omega_{\text{ср}}$ — частота среза фильтра, ω_0 — средняя частота (частота настройки фильтра).

Пусть на входе фильтра действует комплексное гармоническое колебание $z_{\text{вх}}(t) = [\cos(\omega t) + j \sin(\omega t)]$ с частотой ω .

Для рассматриваемого фильтра комплексные импульсная и переходная характеристики записываются следующим образом [2, 10]:

$$\begin{aligned} h^*(t) &= \omega_{\text{ср}} e^{-\omega_{\text{ср}} t} [\cos(\omega_0 t) + j \sin(\omega_0 t)]; \\ g^*(t) &= \frac{\omega_{\text{ср}}}{\omega_0^2 + \omega_{\text{ср}}^2} \left\langle \left\{ e^{-\omega_{\text{ср}} t} [\omega_0 \sin(\omega_0 t) - \omega_{\text{ср}} \cos(\omega_0 t)] + \omega_{\text{ср}} \right\} - \right. \\ &\quad \left. - j \left\{ e^{-\omega_{\text{ср}} t} [\omega_{\text{ср}} \sin(\omega_0 t) + \omega_0 \cos(\omega_0 t)] + \omega_0 \right\} \right\rangle. \end{aligned} \quad (7)$$

При этом производная входного сигнала определяется выражением

$$\frac{dz_{\text{вх}}(t)}{dt} = \omega [\cos(\omega t) - j \sin(\omega t)].$$

После подстановки производной входного сигнала в (5) с учетом выражения (7) получим комплексный выходной сигнал рассматриваемого фильтра:

$$\begin{aligned} z_{\text{вых}}(t) &= \int_0^t \omega [\cos(\omega \tau) - j \sin(\omega \tau)] \frac{\omega_{\text{ср}}}{\omega_0^2 + \omega_{\text{ср}}^2} \times \\ &\quad \times \left\langle \left\{ e^{-\omega_{\text{ср}}(t-\tau)} [\omega_0 \sin(\omega_0(t-\tau)) - \omega_{\text{ср}} \cos(\omega_0(t-\tau))] + \omega_{\text{ср}} \right\} - \right. \\ &\quad \left. - j \left\{ e^{-\omega_{\text{ср}}(t-\tau)} [\omega_{\text{ср}} \sin(\omega_0(t-\tau)) + \omega_0 \cos(\omega_0(t-\tau))] + \omega_0 \right\} \right\rangle d\tau. \end{aligned}$$

Интеграл в данной формуле является табличным [11]. В окончательном виде для установившегося режима можно записать следующие соотношения для комплексного выходного сигнала полосового фильтра:

$$x(t) = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega - \omega_0}{\omega_{cp}}\right)^2}} \cos\left(\omega t - \arctg \frac{\omega - \omega_0}{\omega_{cp}}\right);$$

$$y(t) = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega - \omega_0}{\omega_{cp}}\right)^2}} \sin\left(\omega t - \arctg \frac{\omega - \omega_0}{\omega_{cp}}\right).$$

Данные выражения строго определяют выходной сигнал комплексного полосового фильтра первого порядка при гармоническом входном сигнале.

Полученные в работе соотношения (5) и (6) для комплексного интеграла наложения дополняют известную методику анализа линейных систем.

Заключение. В результате проведенных исследований получила дополнительное развитие теория линейных систем. Представленная форма интеграла наложения позволяет при заданной производной комплексного входного сигнала и известной комплексной переходной характеристике фильтра либо при заданном комплексном входном сигнале и известной производной комплексной переходной характеристике найти выходной сигнал комплексного фильтра. Разработанная методика может быть использована при синтезе по заданной переходной характеристике комплексных дискретных линейных систем, динамические свойства которых совпадают с динамическими свойствами непрерывных линейных систем—аналогов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Воробьев С. Н. Цифровая обработка сигналов. СПб: Изд. дом „Академия“, 2013. 318 с.
2. Гоноровский И. С. Радиотехнические цепи и сигналы. М.: Радио и связь, 1986. 512 с.
3. Оппенгейм А., Шаффер Р. Цифровая обработка сигналов. М.: Техносфера, 2006. 855 с.
4. Зиатдинов С. И. Синтез нерекурсивных дискретных фильтров во временной области // Информационно-управляющие системы. 2016. № 5. С. 98—101.
5. Зиатдинов С. И. Синтез рекурсивных дискретных фильтров во временной области // Изв. вузов. Радиоэлектроника. 2016. № 3. С. 3—6.
6. Зиатдинов С. И. Анализ линейных систем на основе переходных характеристик // Информационно-управляющие системы. 2016. № 2. С. 104—106.
7. Зиатдинов С. И. Импульсная характеристика комплексного полосового фильтра Баттерворта // Изв. вузов. Приборостроение. 2015. Т. 58, № 8. С. 167—172.
8. Зиатдинов С. И. Синтез комплексного фильтра с заданной передаточной функцией // Изв. вузов. Приборостроение. 2016. Т. 59, № 7. С. 253—259.
9. Микропроцессорные системы автоматического управления / Под общ. ред. В. А. Бесекерского. Л.: Машиностроение, 1988. 355 с.
10. Бесекерский В. А. Цифровые автоматические системы. М.: Наука, 1976. 576 с.
11. Брычков Ю. А., Маричев О. И., Прудников А. П. Таблицы неопределенных интегралов. М.: Наука, 1986. 192 с.

Сведения об авторах

- Сергей Ильич Зиатдинов** — д-р техн. наук, профессор; СПбГУАП, кафедра информационно-сетевых технологий; E-mail: kaf53@guap.ru
- Юлия Витальевна Соколова** — аспирант; СПбГУАП, кафедра информационно-сетевых технологий; E-mail: kaf53@guap.ru

Рекомендована кафедрой
информационно-сетевых технологий

Поступила в редакцию
20.02.17 г.

Ссылка для цитирования: Зиятдинов С. И., Соколова Ю. В. Анализ комплексных фильтров на основе переходных характеристик // Изв. вузов. Приборостроение. 2017. Т. 60, № 7. С. 641—646.

ANALYSIS OF COMPLEX FILTERS WITH THE USE OF TRANSITION CHARACTERISTICS

S. I. Ziatdinov, Yu. V. Sokolova

*St. Petersburg State University of Aerospace Instrumentation,
190000, St. Petersburg, Russia
E-mail: kaf53@guap.ru*

A method for studying complex filter with the use of the transition characteristics is developed. Presentation of input signal as a sum of step functions shifted relative to each other leads to a new form of complex superposition integral allowing to determine the filter output signal for a given complex-valued input and a known complex transition characteristic. Application of complex filters is shown to enable variation of their frequency settings without a change in shape of the amplitude and phase-frequency characteristics. The concepts of complex delta function and complex transition characteristics are introduced; the concepts are employed in the study of dynamic properties of the filters and transmission of various signals. In contrast to the known method of analysis of linear systems based on the pulse characteristic, the proposed method may be used to synthesize complex discrete filter with dynamic properties coinciding with those of a continuous filter-analog. The developed theoretical principles are confirmed by presented examples.

Keywords: complex signal, complex filter, complex pulse characteristic, complex transition characteristic, superposition integral

Data on authors

- Sergey I. Ziatdinov** — Dr. Sci., Professor; St. Petersburg State University of Aerospace Instrumentation, Department of Information Network Technologies;
E-mail: kaf53@guap.ru
- Yulia V. Sokolova** — Post-Graduate Student; St. Petersburg State University of Aerospace Instrumentation, Department of Information Network Technologies;
E-mail: kaf53@guap.ru

For citation: Ziatdinov S. I., Sokolova Yu. V. Analysis of complex filters with the use of transition characteristics. *Journal of Instrument Engineering*. 2017. Vol. 60, N 7. P. 641—646 (in Russian).

DOI: 10.17586/0021-3454-2017-60-7-641-646