УДК 62.50

Н. А. ДУДАРЕНКО, М. В. ПОЛЯКОВА, А. В. УШАКОВ

КОНСТРУИРОВАНИЕ ВЕЩЕСТВЕННОЗНАЧНОЙ КРИТЕРИАЛЬНОЙ МАТРИЦЫ ДЛЯ ОДНОКАНАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ

Рассматривается проблема контроля вырождения динамической системы типа „многомерный вход—многомерный выход“. Решение задачи базируется на конструировании инструментария контроля вырождения критериальной матрицы.

Ключевые слова: *динамическая система, функционал, критериальная матрица, матричная геометрическая прогрессия.*

Введение. Сложная динамическая система типа „многомерный вход—многомерный выход“ (МВМВ) в математической постановке ее функционирования реализует линейный (локально линейный) оператор (ЛО), отображающий пространство целевых намерений в пространство осуществляемых реализаций, при этом размерности этих пространств полагаются равными.

В математической постановке линейный оператор оказывается вырожденным [1], если его ранг становится меньше размерности указанных пространств. Множество причин может привести к вырождению ЛО сложной динамической системы МВМВ-типа. Система может вырождаться, когда из ее состава выпадает некоторый функциональный элемент, в результате система становится функционально неполной. Как следствие, сокращается размерность пространства осуществляемых реализаций. Причины вырождения могут носить организационный характер, когда формируемые целевые намерения неудачно распределяются по входам сложной динамической системы. Вырождаться могут системы вследствие параметрической неопределенности, когда не должным образом организованы связи между каналами системы МВМВ-типа, когда неправильно назначены по знаку и величине коэффициенты передачи этих связей, когда неудачно сформированы полосы пропускания каналов.

Технология контроля вырождения. Для построения технологии контроля вырождения в соответствии с математическим определением вырождения необходимо представить сложную динамическую систему МВМВ-типа в виде линейной алгебраической задачи (ЛАЗ), матрица которой задает оператор, отображающий пространство целевых намерений в пространство осуществляемых реализаций

$$\eta(w) = N(w,\theta)\chi(w), \tag{1}$$

где $N(w,\theta)$ — $(m\times m)$-матрица для любых w, θ; $\eta(w)$, $\chi(w)$ — p-мерные векторы, θ — p-мерный параметр, изменяющий алгебраические свойства матрицы N.

Инструмент контроля вырождения построен на спектре сингулярных чисел α_j, функционалов J_ν $(\nu=\overline{m,1})$ с использованием предложенной ЛАЗ (1). Для контроля вырождения воспользуемся функционалами J_ν, которые строятся на спектре

$$\sigma_\alpha\{N\} = \left\{\alpha_j = \left|\mu_j^{1/2}\right| : \mu_i : \det\left(\mu I - N^T N\right) = 0 : j = \overline{1,m}\right\} \tag{2}$$

сингулярных чисел $\alpha_j \left(j=\overline{1,m}\right)$ критериальной матрицы N и в силу соотношений

$$J_\nu\{N\} = \alpha_\nu\{N\}/\alpha_1\{N\};\ \nu=\overline{m,1}. \tag{3}$$

Воспользуемся сингулярным разложением матрицы N (SVD-процедурой) [1, 2]:

$$N = U_N \Sigma_N V_N^T, \tag{4}$$

$$N V_{Nj} = \alpha_j U_{Nj}, \; j = \overline{1, p}. \tag{5}$$

Векторно-матричное соотношение (5) придает исходной линейной алгебраической задаче (1) геометрический смысл такой, что вектор $\chi = V_{Nj}$ $(j = \overline{1, p})$ отражается в подпространство, натянутое на j-й элемент U_{Nj} левого сингулярного базиса U_N так, что соответствующий ему вектор имеет норму, равную α_j. Тогда задача контроля вырождения формализуется как оценка перехода критериальной матрицы N из сферы, расположенной в пространстве, натянутом на векторы χ, в эллипсоид, натянутый на левый сингулярный базис U_N с размерами полуосей, совпадающими с сингулярными числами матрицы N.

При $J = 1$ (см. (3)), матрица N вырождается, т.е. происходит „сплющивание“ этого эллипсоида вдоль его p-й полуоси, т.е. вдоль p-го левого сингулярного вектора U_{Np}. Нетрудно видеть, что если параметр θ изменяет матрицу $N(\theta)$ таким образом, что последовательно, начиная с α_p, принимают нулевые значения остальные ($p-1$) сингулярных чисел, кроме α_1, то в пространстве, натянутом на левый сингулярный базис, будет наблюдаться последовательное „сплющивание“ эллипсоида вдоль векторов U_{Np}, U_{Np-1}, …, U_{N2}. В итоге сфера отобразится в отрезок прямой.

Функционалы J_ν используются для количественной оценки вырождения, они конструируются на спектре сингулярных чисел α_J критериальной матрицы системы.

Свойство 1. Функционалы J_ν критериальной матрицы N обладают свойством

$$0 \le J_\nu\{N\} \le 1; \quad \nu = \overline{1, m}. \tag{6}$$

Свойство 2. Функционалы J_ν не зависят от умножения критериальной матрицы N на скаляр α, в общем случае параметризованный неким параметром γ, так что $\alpha = \alpha(\gamma)$, что представимо в форме

$$J_{G\nu}\{\alpha(\gamma)[N]\} = J_{G\nu}\{[N]\} = J_{G\nu}; \quad \nu = \overline{1, m}. \tag{7}$$

Свойство 3. Функционалы J_ν критериальной матрицы N не зависят от умножения критериальной матрицы слева или справа на ортогональную матрицу.

Свойство 4. Глобальный функционал J_G критериальной матрицы N совпадает с величиной, обратной числу $C\{N\}$ обусловленности этой матрицы

$$C\{N\} = \|\{N\}\| \left\|\{N^{-1}\}\right\|, \tag{8}$$

если в (8) использованы спектральные нормы матриц, так что выполняется равенство

$$J[N] = C^{-1}[N] = \alpha_m / \alpha_1. \tag{9}$$

Свойство 5. Для глобального функционала J_G прямой матрицы N и обратной ей N^{-1} выполняется соотношение

$$J_G(N) = J_G\left(N^{-1}\right). \tag{10}$$

Основной результат. Формирование вещественнозначной критериальной матрицы на основе разложения резолвенты. Для сведения системы МВМВ-типа к ЛАЗ вида (1) воспользуемся аппаратом передаточных матриц, выделив из него передаточную матрицу $\Phi(s)$ отношения „вход—выход", задаваемую в форме

$$\Phi(s)=\arg\{y(s)=\Phi(s)g(s)\}. \tag{11}$$

Соотношение (11) задает ЛАЗ в виде (1) и связывает реализации комплекснозначных векторов входа $g(s)$ и выхода $y(s)$. Для конструирования вещественнозначной версии ЛАЗ, а следовательно и вещественнозначной критериальной матрицы, ограничимся установившимся значением векторного экзогенного воздействия, установившимся значением вектора скорости этого воздействия и вектора ускорения этого воздействия. Тогда для установившегося значения вектора выхода системы МВМВ-типа оказывается справедливым представление

$$y_{\text{уст}}(t)=K_0 g(t)+K_1\dot{g}(t)+K_2\ddot{g}(t)+...K_l g^{(l)}(t), \tag{12}$$

$K_0, K_1, K_2, ..., K_l$ — матричные коэффициенты, связывающие вектор установившегося значения выхода с векторами производных соответствующих порядков экзогенного воздействия. Нетрудно видеть, что выражение (12) содержит $l+1$ критериальную матрицу (для физически реализуемых систем $l+1=3$). Задача исследования вырождения сложной динамической системы МВМВ-типа, порождаемая установившимся значением $g(t)$, установившимся значением скорости его изменения и установившимся значением ускорения, будет решена, если исследователь получит аналитическое представление этих матричных коэффициентов как функции структурных моделей компонентов систем. При этом исследователь получит отдельные критериальные матрицы, имеющие вещественнозначные представления.

Для вычисления введенных матричных коэффициентов $K_l (l=0, 1, 2, ...)$ воспользуемся разложением резолвенты, входящей в состав аналитического представления передаточной функции $\Phi(s)$ системы МВМВ-типа, задаваемой с помощью векторно-матричного описания аппарата метода пространства состояния [4, 5]

$$\dot{x}(t)=Fx(t)+Eg(t): x(0)=x(t)\big|_{t=0} \quad y(t)=Cx(t)+Dg(t). \tag{13}$$

Произведем над выражениями (12) и (13) аналитические преобразования. Для этого к (12) применим преобразование Лапласа, в результате чего получим

$$y_{\text{уст}}(s)=\left(K_0+K_1 s+K_2 s^2+...\right)g(s). \tag{14}$$

В свою очередь, применение преобразования Лапласа к выражению (13) позволяет сформировать выражение для передаточной функции $\Phi(s)$ системы МВМВ-типа в форме

$$\Phi(s)=C(sI-F)^{-1}E+D. \tag{15}$$

Очевидно, подстановка выражения (15) в соотношение (11), примененная для случая установившегося режима, позволяет записать

$$y_{\text{уст}}(s)=\left\{C(sI-F)^{-1}E+D\right\}g(s). \tag{16}$$

Из сравнения выражений (14) и (16) видно, что задача конструирования матричных коэффициентов $K_l (l=0, 1, 2, ...)$, являющихся отдельными критериальными матрицами, будет решена, если в (16) удастся разложить резолвенту $(sI-F)^{-1}$ по положительным степеням комплексной переменной s. Для этого, осуществляя преобразование, приведем резольвенту $(sI-F)^{-1}$ к виду

$$(sI-F)^{-1}=-(F-sI)^{-1}=-\left[(F-sI)^{-1}\right]=-\left[(F-sI)^{-1}\right]=$$

$$=-\left[\left(sI-F^{-1}\right)F\right]^{-1}=-F^{-1}\left(I-sF^{-1}\right)^{-1}. \qquad (17)$$

Представление (17) резольвенты позволяет записать ее в мультипликативной форме матрицы F^{-1} и суммы членов матричной геометрической прогрессии с показателем sF^{-1}

$$\left(I-sF^{-1}\right)^{-1}=-F^{-1}\left(I+sF^{-1}+s^2F^{-2}+\ldots s^pF^{-p}\right)=-F^{-1}-sF^{-2}-s^2F^{-3}-\ldots-s^pF^{-p}. \qquad (18)$$

Воспользуемся соотношением (18) для представления выражения (16) по положительным степеням s, тогда получим

$$y_{\text{уст}}(s)=\left(\left(I+CF^{-1}E+D\right)+CF^{-2}Es+CF^{-3}Es^3+\ldots+CF^{-p+1}Es^p\right)g(s). \qquad (19)$$

Сравнение выражений (19) и (14) позволяет получить представления матричных коэффициентов K_l в форме

$$K_0=\left(I+CF^{-1}E+D\right);\ K_l=CF^{-(l+1)}E\,(l=1,2,\ldots). \qquad (20)$$

Нетрудно видеть, что матричные коэффициенты вида (20) представляют собой искомые вещественнозначные критериальные матрицы семейства линейных алгебраических задач вида

$$y_{l\ \text{уст}}(t)=K_l g^{(l)}(t);\ l=0,1,2\ \ldots \qquad (21)$$

сложной динамической системы МВМВ-типа, связывающие l-й компонент $y_{l\text{уст}}(t)$ значения вектора выхода $y_{\text{уст}}(t)$ с установившимися значениями вектора скорости изменения внешнего воздействия $g(t)$, установившимся значением вектора его ускорения и остальных высших производных.

Заключение. Полученное семейство вещественнозначных критериальных матриц позволяет для случая установившегося режима функционирования сложной системы МВМВ-типа, который наиболее характерен для решения задач исследования вырождения, оценивать покомпонентно влияние скорости, ускорения и прочих высших производных на возможность вырождения системы указанного типа.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Дударенко Н. А., Слита О. В., Ушаков А. В.* Математические основы современной теории управления: аппарат метода пространства состояний: Учеб. пособие. СПб: СПбГУ ИТМО, 2008.

2. *Дударенко Н. А., Полякова М. В., Ушаков А. В.* Контроль вырождения сложных динамических систем созидательного типа с антропокомпонентами // Науч.-технич. вестн. СПбГУ ИТМО. Вып. 55. Управление, моделирование, информационная безопасность. 2008. С. 25—30.

3. *Бочков А. Л., Дударенко Н. А., Ушаков А. В.* Синтез многомерных функционально вырожденных динамических систем // Изв. вузов. Приборостроение. 2008. Т. 51, № 1. С. 25—29.

4. *Акунов Т. А., Ушаков А. В*. Синтез систем гарантированной модальной стабильности // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2003. № 4. С. 9—17.

5. *Бесекерский В.А., Попов Е.П.* Теория систем автоматического управления. СПб: Профессия, 2007.

6. *Дударенко Н. А., Полякова М. В., Ушаков А. В.* Достаточные алгебраические условия обобщенной синхронизируемости многоканальных динамических объектов // Мехатроника, автоматизация, управление. 2009. № 5. С. 17—20.

Сведения об авторах

Наталия Александровна Дударенко — канд. техн. наук, доцент; Санкт-Петербургский государственный университет информационных технологий, механики и оптики, кафедра систем управления и информатики; E-mail: dudarenko@yandex.ru

Майя Вячеславовна Полякова — аспирант; Санкт-Петербургский государственный университет информационных технологий, механики и оптики, кафедра систем управления и информатики; E-mail: 12noch@mail.ru

Анатолий Владимирович Ушаков — д-р техн. наук, профессор; Санкт-Петербургский государственный университет информационных технологий, механики и оптики, кафедра систем управления и информатики; E-mail:Ushakov-AVG@yandex.ru

Рекомендована кафедрой
систем управления и информатики

Поступила в редакцию
01.07.09 г.