УДК 621.398.1

А. В. Ушаков, Е. С. Яицкая

ПОМЕХОЗАЩИТНОЕ ДЕКОДИРОВАНИЕ СИСТЕМАТИЧЕСКИХ КОДОВ

Определяется зависимость скорости сходимости процесса наблюдения от индекса нильпотентности матрицы состояния динамического наблюдающего устройства (ДНУ). Рассматривается задача помехозащитного декодирования в форме построения ДНУ вектора начального состояния системы.

Ключевые слова: *динамическое наблюдающее устройство, вектор невязки наблюдения, помехозащитное декодирование.*

Введение. Базовые концепции двоичного динамического наблюдения. Для рассмотрения задачи двоичного динамического наблюдения представим линейную двоичную динамическую систему (ЛДДС) [1, 2], состояние которой подлежит наблюдению, имеющую векторно-матричное описание

$$\chi(k+1)=A\chi(k)+Bu(k), \quad \chi(0)=\chi_0, \quad \xi(k)=C\chi(k)+Hu(k), \tag{1}$$

где χ, u, ξ — соответственно n-мерный вектор состояния, r-мерный вектор входной последовательности, l-мерный вектор выходной последовательности; матрицы A, B, C, H согласованы по размерности с векторами χ, u и ξ. Элементы векторов и матриц принадлежат двоичному простому полю Галуа $GF(2)$.

Двоичное динамическое наблюдающее устройство (ДНУ), использующее всю доступную для непосредственного измерения информацию об ЛДДС (1) в виде входной последовательности $u(k)$ и выходной — $y(k)$, реализуется в форме следующей зависимости:

$$z(k+1)=\Gamma z(k)+L\xi(k)+Gu(k), \quad z(0)=z_0, \tag{2}$$

где z — m-мерный вектор состояния ДНУ, матрица Γ определяет динамику процесса наблюдения, а пара матриц (L, G) обладает следующими свойствами:

$$L=\arg\left\{\operatorname{contr}\left(\Gamma,L\right)\right\},G=\arg\left\{\operatorname{contr}\left(\Gamma,G\right)\right\},$$

где $\operatorname{contr}\{\ \}$ — предикат наличия полной управляемости пары матриц [3].

Рассмотрим задачу определения вектора χ состояния системы (1) в среде ДНУ (2) в виде

$$z(k)=T\chi(k)+\theta(k),\quad \forall k, \tag{3}$$

где T — матрица преобразования подобия (в общем случае — особого); $\theta(k)$ — вектор невязки наблюдения (ВНН).

Сформулируем следующее утверждение.

Утверждение 1. Если матрицы T, L, G удовлетворяют матричным соотношениям

$$\Gamma T+TA=LC,\quad G=TB, \tag{4}$$

то процесс по ВНН $\theta(k)$ описывается рекуррентным векторно-матричным уравнением

$$\theta(k+1)=\Gamma\theta(k),\quad \theta(0)=T\chi(0)+z(0). \tag{5}$$

Доказательство утверждения проведем путем подстановки в (5) векторно-матричных соотношений (1), (2) и (4), в результате чего снова приходим к (5).

Для решения задачи определения вектора $\chi(k)$ текущего состояния ЛДДС (1) воспользуемся явным (показательным) решением (5) и условием обнуления состояния ДНУ при запуске ($z(0)=0$). С учетом этих обстоятельств имеем

$$\theta(k)=\Gamma^{k}T\chi(0). \tag{6}$$

В свою очередь, подстановка (6) в (3) дает

$$z(k)=T\chi(k)+\Gamma^{k}\theta(0). \tag{7}$$

Пусть матрица Γ состояния ДНУ обладает свойством нильпотентности с индексом ν, тогда при $k\ge\nu$ устанавливается равенство

$$z(k)=T\chi(k),\quad k\ge\nu. \tag{8}$$

Таким образом, вектор $z(k)$ состояния ДНУ с точностью до матрицы преобразования подобия T задает текущее состояние вектора $\chi(k)$ наблюдаемой ЛДДС (1). Причем скорость сходимости процесса по ВНН тем выше, чем меньше индекс нильпотентности матрицы Γ состояния ДНУ. Подтвердим данное утверждение примерами.

Примеры построения двоичных наблюдающих устройств. Рассмотрим задачу синтеза ДНУ для определения вектора текущего состояния ЛДДС, (A,B,C,H)-описание которой характеризуется матрицами

$$A=\begin{bmatrix}0&1&1\\1&0&0\\0&1&0\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix},\ C=\begin{bmatrix}0&1&0\end{bmatrix},\ H=\begin{bmatrix}0\end{bmatrix}.$$

С целью решения поставленной задачи в соответствии с выражениями (7) и (8) выберем в качестве модели ДНУ регистр сдвига третьего порядка. Для определения вектора текущего состояния представленной ЛДДС рассмотрим матрицы состояния ДНУ с различными индексами нильпотентности:

$$\text{а) } \nu=3 \ \Gamma_3=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}; \text{ б) } \nu=2 \ \Gamma_2=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}; \text{ в) } \nu=1 \ \Gamma_1=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}.$$

Решим поставленную задачу в форме (8). Решение уравнения Сильвестра (4) относительно матриц T и L и вычисление матрицы G дает:

а) $$T_3=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&0&1\\0&0&1\end{bmatrix},\ L_3=\begin{bmatrix}0&0&1\end{bmatrix}^T,\ G_3=\begin{bmatrix}0&0&1\end{bmatrix}^T;$$

б) $$T_2=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&0&1\\0&0&1\end{bmatrix},\ L_2=\begin{bmatrix}0&1&1\end{bmatrix}^T,\ G_2=\begin{bmatrix}0&1&1\end{bmatrix}^T;$$

в) $$T_1=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&0&1\\0&0&1\end{bmatrix},\ L_1=\begin{bmatrix}1&1&1\end{bmatrix}^T,\ G_1=\begin{bmatrix}1&1&1\end{bmatrix}^T.$$

В соответствии с (8) и поскольку матрица Γ имеет индекс нильпотентности, равный ν, очевидно, что начиная с момента $k\geq\nu$ вектор состояния z ДНУ должен будет с точностью до матрицы преобразования подобия T совпасть с вектором состояния χ исходной ЛДДС. Покажем это, полагая, что входная последовательность $u(k)$ ЛДДС на первых семи тактах имеет вид $u(k)$:1100110, а начальное состояние $\chi(0)$ ЛДДС определяется вектором $\chi(0)=\begin{bmatrix}0&0&1\end{bmatrix}^T$.

ν	k	0	1	2	3	4	5	6	7
	$u(k)$	0	1	1	0	0	1	1	0
	$\chi^T(k)$	001	100	111	110	111	011	100	111
3	$z^T(k)$	000	000	001	010	101	011	110	101
	$(T_3\chi)^T(k)$	111	110	101	010	101	011	110	101
2	$z^T(k)$	000	000	011	100	011	111	100	011
	$(T_2\chi)^T(k)$	111	100	011	100	011	111	100	011
1	$z^T(k)$	000	000	111	000	111	111	000	111
	$(T_1\chi)^T(k)$	111	000	111	000	111	111	000	111

Из таблицы видно, что начиная с k-го такта, т.е. с выполнением условия $k=\nu$, вектор состояния z синтезированного ДНУ повторяет в форме $z(k)=T\chi(k)$ состояние наблюдаемой ЛДДС. Таким образом, иллюстрируется утверждение: чем меньше индекс нильпотентности матрицы Γ состояния ДНУ, тем выше скорость сходимости процесса по ВНН.

С использованием полученных результатов структурно-функциональная схема процесса двоичного динамического наблюдения вектора текущего состояния заданной ЛДДС примет вид, представленный на рис. 1.

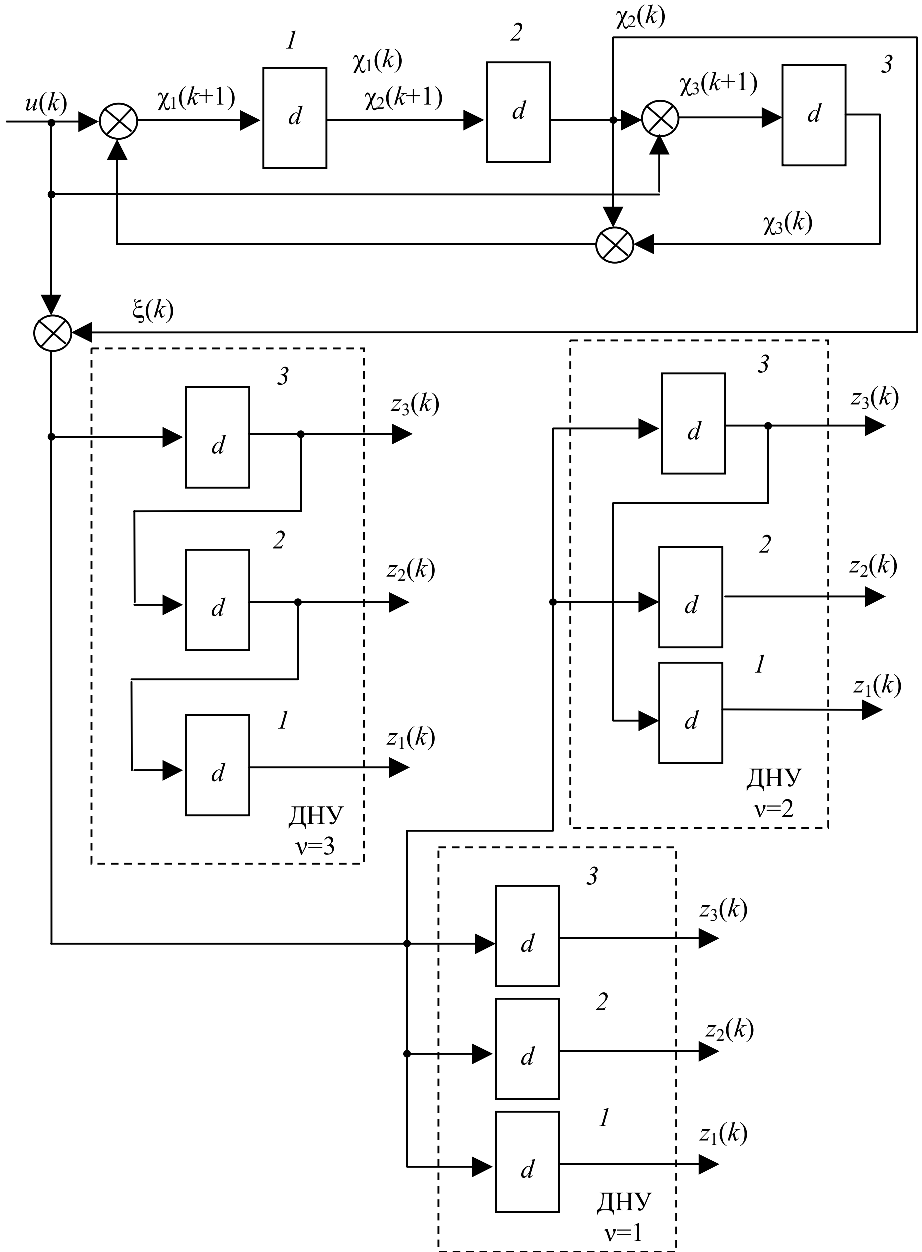

Рис. 1

Основной результат. Поставим задачу помехозащитного декодирования систематических кодов [4] как задачу определения вектора $\chi(0)$ начального состояния регистра канала связи (РКС).

Кодирующее устройство (КУ), на выходе которого формируется (n, k)-помехозащищенный код y, выводимый в канал связи в виде двоичной кодовой последовательности $y(k)$ старшим разрядом вперед, представляется n-разрядным регистром сдвига, начальное состояние которого $x(0)$ представляет собой передаваемую помехозащищенную кодовую посылку. Векторно-матричное модельное представление КУ имеет вид

$$x(k+1)=F\,x(k);\;\; x(0);\quad y(k)=P\,x(k),$$

где F — матрица размерностью $n\times n$ является нильпотентной с индексом $\nu=n$ [5].

Формирователь импульсной помехи ξ, которая в канале связи (КС) искажает передаваемую кодовую посылку y, также представим *n*-разрядным регистром сдвига. РКС характеризуется нулевой входной последовательностью и вектором начального состояния $\chi(0)$, который представляет собой *n*-разрядный вектор помехи ξ, выводимый в КС в виде последовательности $\xi(k)$ старшим разрядом вперед. Векторно-матричное описание РКС имеет вид

$$\chi(k+1)=A\chi(k);\chi(0);\quad \xi(k)=C\chi(k).$$

Матрица A совпадает с матрицей F и также является нильпотентной с индексом нильпотентности $\nu=n$.

Процесс искажения кодовой последовательности $y(k)$ при передаче по КС представим суммированием в простом двоичном поле $GF(2)$, в результате чего формируется искаженная кодовая комбинация $f=y+\xi$ в виде кодовой последовательности $f(k)=y(k)+\xi(k)$.

Процесс декодирования реализуем, построив ДНУ, формирующее к моменту $k=n$ состояние $z(n)$, которое с точностью до матрицы преобразования подобия T_χ представляло бы собой вектор $\chi(0)$ начального состояния РКС. Векторно-матричное описание ДНУ — декодирующего устройства (ДКУ) — принимает вид

$$z(k+1)=\Gamma z(k)+Lf(k);\quad z(0).$$

Поставленная задача помехозащитного декодирования опирается на следующее утверждение.

Утверждение 2. Если ДНУ начального состояния $\chi(0)$ функционирует так, что всегда $z(0)=0$, т.е. перед запуском его состояние обнуляется, матрица Γ принадлежит показателю $\mu=n$, матрицы A и F обладают индексом нильпотентности $\nu=n$ [5], матрица преобразования подобия T_x обладает свойством

$$T_x G^T=O, \tag{9}$$

где G — образующая матрица систематического кода, то выполняется соотношение векторно-матричного подобия $z(n)=T_\chi \chi(0)$, O — нулевая матрица.

Доказательство утверждения строится на определениях свойств нильпотентности матрицы и принадлежности матрицы показателю, а также на использовании условия $z(0)=0$.

Следует заметить, что в силу (9) матрица T_x как решение матричного уравнения Сильвестра

$$T_\chi A+\Gamma T_\chi=LC,\ T_x F+\Gamma T_x=LP \tag{10}$$

является проверочной матрицей [6] систематического кода.

Вектор $x(0)$ формируется из информационной части $x_u(0)$ систематического помехозащищенного кода с помощью образующей матрицы G кода в силу соотношения $x(0)=G^T x_u(0)$.

В качестве примера рассмотрим аналитическое решение задачи конструирования декодирующего устройства в форме ДНУ циклического кода с образующим многочленом $g(x)=x^2+x+1$. Сконструируем ДКУ в форме ДНУ и кодирующее устройство в виде модельных представлений „вход—состояние—выход“ с матричными компонентами

$$A=F=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix},\ C=P=\begin{bmatrix}1&0&0\end{bmatrix}\ \text{соответственно.}$$

Выберем в качестве модели ДНУ регистр сдвига второго порядка, матрица Γ векторно-матричного описания которого будет иметь следующий вид:

$$\Gamma = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Решение относительно матрицы T матричного уравнения (10) дает

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Следует отметить тождественность результата для вычисленной матрицы T каноническому [6] представлению проверочной матрицы $\tilde{H}$ $\left(\tilde{H} = \left[\tilde{G}^T \mid I \right]^T = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{array} \right]^T \right)$ циклического кода, который в рассматриваемом примере соответствует образующему многочлену $g(x) = x^2 + x + 1$.

Заметим также, что процесс декодирования состоит в вычислении вектора ошибки посредством умножения матрицы T^T на вектор начального состояния $\chi(0)$ РКС. Структурная схема процесса декодирования циклического кода с образующим многочленом $g(x) = x^2 + x + 1$ представлена на рис. 2.

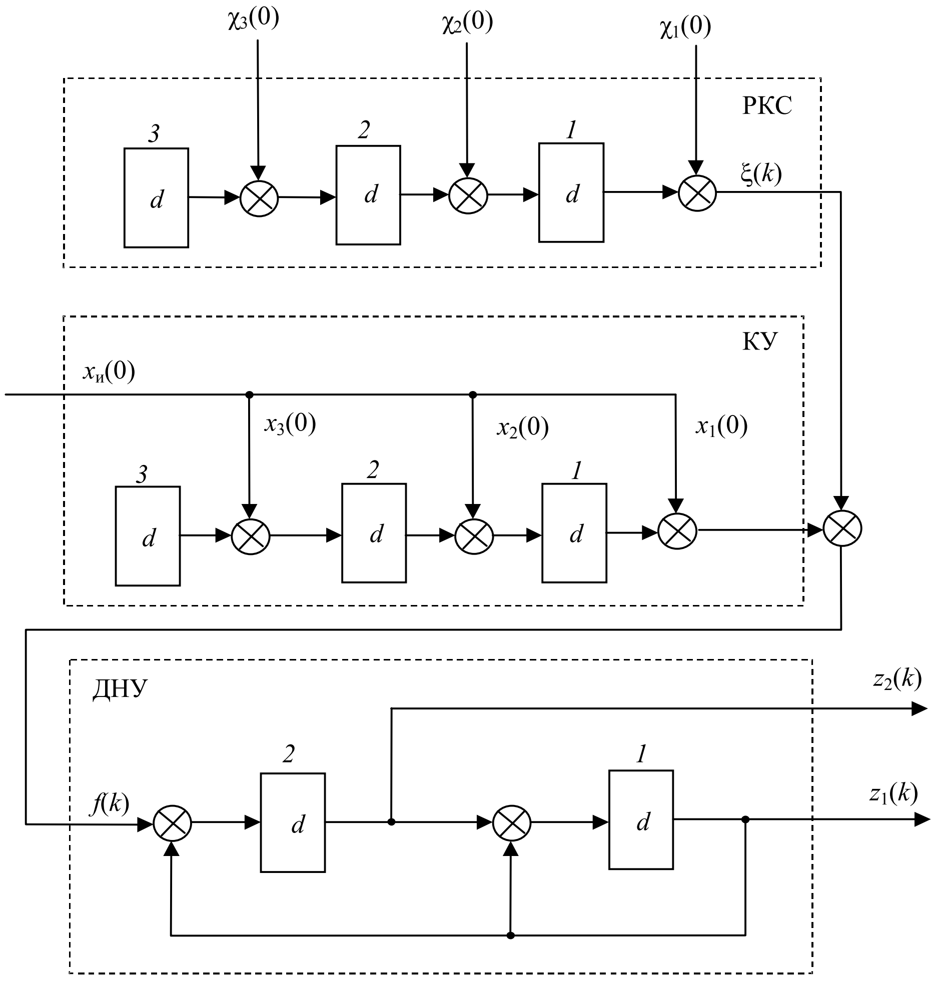

Рис. 2

Заключение. Теория и практика динамического наблюдения за двоичными полями Галуа обнаруживают новые возможности использования последних в задачах помехозащитного декодирования систематических помехозащищенных кодов. Авторы полагают, что формализм матричного уравнения Сильвестра, на котором базируется алгоритмистика конструирования матричных компонентов ДНУ, позволит создать банк реализаций декодирующих устройств систематических кодов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Мельников А. А., Ушаков А. В.* Двоичные динамические системы дискретной автоматики. СПб: СПбГУ ИТМО, 2005.
2. *Кузовков Н. Т.* Модальное управление и наблюдающие устройства. М.: Машиностроение, 1976.
3. *Мирошник И. В.* Теория автоматического управления. Линейные системы. СПб: Питер, 2005.
4. *Емельянов Г. А., Шварцман В. О.* Теория передачи дискретной информации. М.: Связь, 1979.
5. *Мельников А. А., Рукуйжа Е. В., Ушаков А. В.* Использование свойств матриц для обнаружения неустойчивых циклов и неподвижных состояний двоичных динамических систем // Науч.-технич. вестн. СПбГИТМО(ТУ). 2002. Вып. 6. С. 243—249.
6. *Тутевивич В. Н.* Телемеханика. М.: Высш. школа, 1985.

Сведения об авторах

Анатолий Владимирович Ушаков — д-р техн. наук, профессор; Санкт-Петербургский государственный университет информационных технологий, механики и оптики, кафедра систем управления и информатики; E-mail: Ushakov-AVG@yandex.ru

Елена Сергеевна Яицкая — аспирант; Санкт-Петербургский государственный университет информационных технологий, механики и оптики, кафедра систем управления и информатики; E-mail: yaitskayaes@mail.ru

Рекомендована кафедрой
систем управления и информатики

Поступила в редакцию
01.07.09 г.