УДК 519.216

А. В. Денисов, А. П. Филимонов

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ИНФОРМАТИВНЫХ ПРИЗНАКОВ ДЛЯ ВЫЯВЛЕНИЯ МОМЕНТА НАРУШЕНИЯ СТАЦИОНАРНОСТИ СЛУЧАЙНОГО ПРОЦЕССА

Доказывается высокая информативная значимость изменения числа инверсий случайного процесса для выявления момента нарушения стационарного режима работы сложной динамической системы. Рассматриваются два критерия: параметрический, связанный с представлением дисперсий элементарных гармонических составляющих канонического разложения случайного узкополосного процесса в виде координат вектора в гильбертовом пространстве, и непараметрический, позволяющий обнаружить тренд при условии широкой априорной неопределенности процесса.

Ключевые слова: *выбросы случайных процессов, оценивание сигналов, фильтрация сигналов, каноническое представление случайного процесса.*

Современные технические средства позволяют существенно повысить эффективность измерений и фильтрацию случайных сигналов. Задачи обнаружения трендов и выявления моментов нарушения стационарности случайного процесса на фоне существенных помех часто возникают при измерении характеристик геофизических сигналов для определения границ месторождений полезных ископаемых (особенно с подвижных оснований), при информационно-аналитическом сопровождении геофизических работ, при обнаружении аварийных ситуаций в работе сложной динамической системы (какой является, например, плавучая буровая станция). Для решения подобных задач используется функциональная обработка получаемой информации и логические фильтры. Подход, связанный с вычислением среднеквадратического отклонения (СКО) и спектральной плотности, недостаточно чувствителен к отдельным выбросам сигнала, которые несут полезную информацию, а распространенные интегральные фильтры порой не обладают требуемым быстродействием.

В настоящей статье предлагается использовать для математической обработки информации метод параметрической статистики, связанный с минимизацией количества членов канонического разложения, а также метод непараметрической статистики. В обоих случаях важно правильно определить вид изучаемого процесса. Использование непараметрических методов [1, 2] упрощает функциональную и структурную схему устройств обнаружения момента нарушения стационарности процесса при сохранении степени достоверности принятия решений.

Рассмотрим один из параметрических критериев, для чего установим связь между среднестатистическим числом инверсий [3, 4] и параметрами канонического представления [5—7] случайного процесса (СП), который будем считать узкополосным. Важность рассмотрения этого случая связана с квазипериодическим изменением некоторых параметров во времени при изучении различных технологических процессов. Исследуем стационарный СП $a(t)$, который будем полагать нормальным и центрированным, а также дифференцируемым. Пусть на конечном интервале времени Δt процесс имеет N пересечений с пороговым значением $a(t)=0$. В этом случае $\overline{N}$ за время Δt определяется как [3, 4]

$$\overline{N}=\frac{\Delta t}{\pi}\frac{\sigma_{\dot{a}}}{\sigma_a}, \qquad (1)$$

где σ_a и $\sigma_{\dot{a}}$ — соответственно СКО функции $a(t)$ и ее производной $\dot{a}=\dfrac{da}{dt}$.

Из формулы (1) следует, что хотя $\overline{N}$ и зависит от σ_a, но информативным признаком стационарности процесса является отношение указанных СКО. Процесс $\dot{a}(t)$ также является узкополосным.

Сформируем для процесса $\dot{a}(t)$ с нулевым средним значением и дисперсией $\sigma_{\dot{a}}^2$ его каноническое представление [5] в виде тригонометрического ряда на интервале $\left(-\dfrac{T}{2},\dfrac{T}{2}\right)$:

$$\dot{a}(t)=\sum_{l=0}^{\infty}\left[A_l\cos\left(\frac{2\pi l}{T}t\right)+B_l\sin\left(\frac{2\pi l}{T}t\right)\right], \qquad (2)$$

где A_l и B_l — некоррелированные между собой при разных значениях l случайные величины, распределенные по нормальному закону, имеющие нулевые математические ожидания и дисперсии σ_l^2, сумма которых равна $\sigma_{\dot{a}}^2$; при выборе периода разложения T целесообразно использовать оптимальные параметры канонического разложения [7].

В качестве математической модели процесса $\dot{a}(t)$ зададим его корреляционную функцию $K(\tau)$ в следующем виде [7]: на интервале $|\tau|\le T/2$ представим ее в виде произведения огибающей, характеризующейся параметром Ω, и гармонического заполнения с частотой β:

$$K(\tau)=\sigma^2\left(\frac{\sin\Omega\tau}{\Omega\tau}\right)^2\cos\beta\tau,$$

а при $|\tau|>T/2$ положим $K(\tau)=0$. С ростом $|\tau|$ огибающая корреляционной функции впервые обращается в нуль при $\tau=\pm\pi/\Omega$. Интервал между этими двумя точками будем считать периодом T, на котором процесс $\dot{a}(t)$ представлен в виде уравнения (2), затем продолжим это представление на всю временную ось t, при этом функция $\dot{a}(t)$ останется непрерывной. Дисперсии элементарных гармонических составляющих в этом случае определяются формулами

$$\sigma_0^2 = \frac{2}{T}\int_0^{T/2} K(\tau)d\tau, \tag{3}$$

$$\sigma_l^2 = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} K(\tau)\cos\left(\frac{2\pi l}{T}\tau\right)d\tau,\ T = \frac{\pi}{\Omega}.$$

Выбор указанного периода разложения обусловлен, во-первых, быстрым уменьшением дисперсии высокочастотных составляющих процесса [7], так что в каноническом представлении достаточно учесть только несколько первых гармоник; во-вторых, задание корреляционной функции при всех значениях τ с формальной точки зрения требует наличия бесконечной выборки, что практически невозможно.

В соответствии с физической сущностью многих случайных процессов в представлении СП $\dot{a}(t)$ должна отсутствовать постоянная составляющая σ_0^2. При выборе указанного периода T величина σ_0^2 (см. формулу (3)) отсутствует только в двух случаях: если $\Omega/\beta \approx 0{,}30$ или $\Omega/\beta \approx 0{,}42$. В обоих случаях можно ограничиться первой, второй и третьей гармониками, исключив высокочастотные элементарные процессы, дисперсии которых много меньше дисперсии анализируемого СП:

$$\dot{a}(t) \approx \sum_{l=1}^{3}\left[A_l\cos\left(\frac{2\pi l}{T}t\right) + B_l\sin\left(\frac{2\pi l}{T}t\right)\right]. \tag{4}$$

При $\Omega/\beta \approx 0{,}42$ получаем: $\sigma_1^2 = 0{,}15\sigma_{\dot{a}}^2$, $\sigma_2^2 = 0{,}45\sigma_{\dot{a}}^2$, $\sigma_3^2 = 0{,}30\sigma_{\dot{a}}^2$.

Поскольку ряд (2) мажорируется сходящимся положительным числовым рядом, членами которого являются дисперсии элементарных составляющих, то его можно почленно проинтегрировать. Интегрируя соотношение (4) и полагая постоянную интегрирования равной нулю, получаем приближенное каноническое представление для $a(t)$, согласно которому находим среднеквадратическое отклонение σ_a исходного СП $a(t)$:

$$\sigma_a \approx \frac{\sigma_a}{\Omega}\sqrt{\sigma_1^2 + \frac{1}{4}\sigma_2^2 + \frac{1}{9}\sigma_3^2}\ .$$

С учетом этого соотношения формула (1) примет следующий вид:

$$\bar{N} \approx \frac{\Delta t}{\pi}2\Omega\ .$$

При рассмотрении узкополосного случайного процесса изменение значения Ω можно использовать как критерий, характеризующий нарушение стационарного режима СП. Целесообразно, однако, в качестве информативного признака рассматривать дисперсии элементарных процессов, которые можно представить в виде координат вектора в конечномерном гильбертовом пространстве. Этот вектор полностью характеризует СП. Затем можно разделить данное пространство на множества (классы) таким образом, чтобы расстояние между ними было наибольшим, а время, необходимое для идентификации принадлежности вектора к какому-либо классу, было наименьшим.

В случае когда априорная информация о процессе отсутствует или график спектральной плотности характеризуется наличием ряда максимумов на близкорасположенных частотах, для выявления момента нарушения стационарного режима целесообразно использовать метод нелинейной фильтрации сигналов, связанный с суммированием отклонений N от нулевого значения с учетом весовых коэффициентов.

Рассмотрим этот вопрос с общих позиций. Для обнаружения тренда следует использовать непараметрическую форму задания *J*-критерия в виде

$$J = \pm b + \left(\sum_{i=1}^{m} k_i D_i + cF \right) S, \quad (5)$$

где S — вектор-столбец информационных сигналов, полученных по m каналам; b — вектор-столбец, определяемый как стартовая пороговая точка в m-мерном пространстве; c — коэффициент, характеризующий доверительную вероятность обнаружения тренда (он может, например, соответствовать ряду коэффициентов Стьюдента для нормального распределения СП); F — функциональная квадратная матрица ($m \times m$) непараметрического преобразования сигналов; D_i — квадратные матрицы ($m \times m$) для нелинейной обработки входного (векторного) сигнала $a(t)$; k_i — весовые коэффициенты, зависящие от стохастических характеристик сигнала $a(t)$ и измерительных каналов, с помощью коэффициентов k_i можно повысить чувствительность критерия в каждом конкретном случае, не изменяя непосредственно матрицы D_i и время принятия решения.

На основе априорной информации строятся далее вектор-столбцы $J_{\min}$, $J_{\max}$, определяющие граничные значения для каждого информационного параметра. Разность $J_{\max} - J_{\min}$ формирует новый вектор-столбец, по которому можно судить о наличии тренда и о нарушении стационарности режима работы системы.

Проверка этого критерия (в более упрощенном виде — для одного измерительного канала) была осуществлена авторами в НЦ „Вагоны“ Петербургского государственного университета путей сообщения. Для обнаружения схода колесной пары грузового вагона были проведены компьютерное моделирование и натурный эксперимент. Установлено, что „интегральные критерии“ (СКО и основанные на вычислении спектральной плотности) в этом случае неэффективны, а использование непараметрического критерия, подобного приведенному в формуле (5), позволяет зафиксировать время схода вагона при максимальной скорости его движения и при любой шпальной неровности не более чем за 2 с. Эта задача была решена в аналого-цифровом варианте с использованием микропроцессорного устройства, при этом предварительная фильтрация сигнала выполнялась посредством аналоговой части схемы. Был реализован алгоритм, автоматически обнаруживающий и выделяющий тренд в темпе поступления данных, т.е. в реальном масштабе времени. В простейшем случае одноканальной системы графики функций $J_{\min}(N)$ и $J_{\max}(N)$ разделяют пространство (J, N) на область $J_{\min}(N) \le J(N) \le J_{\max}(N)$, в которой процесс стационарен, и две области $J(N) > J_{\max}(N)$, $J_{\min}(N) > J(N)$, в которых процесс становится нестационарным с возрастающим или убывающим трендом.

Таким образом, непараметрическая форма оценки реализаций СП обладает простотой использования и имеет широкую область применения, что существенно улучшает эффективность решения задачи анализа случайных процессов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Дмитриев Ю. Г., Кошкин Г. М.* Непараметрическое оценивание сигналов. М.: Наука, 1997. 336 с.

2. *Тарасенко Ф. П.* Непараметрическая статистика. Томск: Изд-во Томск. ун-та, 1976. 292 с.

3. *Светлицкий В. А.* Случайные колебания механических систем. М.: Машиностроение, 1976. 216 с.

4. *Тихонов В. И.* Выбросы случайных процессов // Успехи физ. наук. 1962. Т. 77, вып. 3. С. 449—480.

5. *Пугачёв В. С.* Теория случайных функций и ее применение. М.: Физматгиз, 1962. 720 с.

6. *Райс С.* Теория флуктуационных шумов // Теория передачи электрических сигналов при наличии помех: Сб. переводов / Под ред. *Н. А. Железнова*. М.: Изд-во иностр. лит., 1953. С. 88—238.

7. *Филимонов А. П., Денисов А. В.* Выбор параметров канонического разложения узкополосного случайного процесса // Изв. вузов. Приборостроение. 2007. Т. 50, № 8. С. 48—53.

Сведения об авторах

Александр Владимирович Денисов — канд. физ-мат. наук, доцент; Санкт-Петербургский государственный горный институт им. Г. В. Плеханова (ТУ), кафедра высшей математики; E-mail: rectorat@spmi.ru

Анатолий Павлович Филимонов — канд. техн. наук, доцент; Петербургский государственный университет путей сообщения, кафедра физики; E-mail: pgups200@rambler.ru

Рекомендована кафедрой
высшей математики СПбГГИ (ТУ)

Поступила в редакцию
23.10.09 г.