УДК 621.391.82

А. Ю. Янушковский, А. В. Кривошейкин

ТОЧНОСТЬ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПАРАМЕТРОВ ДЕМОДУЛЯТОРА В СИСТЕМАХ С КВАДРАТУРНОЙ АМПЛИТУДНО-ФАЗОВОЙ МОДУЛЯЦИЕЙ

Предложен метод нахождения допусков на параметры демодулятора в цифровых системах связи, применяющих квадратурную амплитудно-фазовую модуляцию (например, в системе цифрового кабельного телевидения). Дан вывод выражения, связывающего отклонение параметра демодулятора и вероятность ошибки.

Ключевые слова: *отклонение вероятности ошибки, квадратурная амплитудно-фазовая модуляция, допуск на параметры, расстояния между сигналами, поле сигналов, квадратурные каналы, пороговые уровни, чувствительность.*

Введение. Основные результаты классической теории помехоустойчивости [1] получены в предположении, что появление ошибок в канале связи вызывают присутствующие в нем аддитивные или мультипликативные помехи. Между тем к ошибкам впоследствии могут привести дестабилизирующие факторы, возникающие в процессе производства и эксплуатации приемопередающей аппаратуры. Таким образом, значения параметров аппаратуры отклоняются от номинальных, и как следствие — реальная вероятность ошибки отклоняется от значения, полученного с использованием теории помехоустойчивости [1].

В настоящее время широкое применение нашли системы многоуровневой квадратурной амплитудно-фазовой модуляции (КАМ), чувствительные к этим факторам. Поэтому необходимо установить зависимость отклонения вероятности ошибки от отклонения параметров аппаратуры и найти допуск на параметры аппаратуры при заданном допуске на отклонение вероятности ошибки. Способ решения этих задач применительно к демодулятору системы КАМ рассматривается в предлагаемой статье.

Квадратурная амплитудная модуляция заключается в одновременной амплитудной модуляции двумя сигналами двух квадратурных составляющих несущей с частотой ω_0 и получении суммарного сигнала.

Для демодуляции используется синхронное детектирование, заключающееся в умножении сигнала на $\cos\omega_0 t$ и на $\sin\omega_0 t$ с последующим подавлением высокочастотных составляющих фильтром низкой частоты [2].

Если для каждой из квадратурных составляющих зафиксировать 16 уровней, то в результате получится модуляция (манипуляция) 256 КАМ с 256 возможными комбинациями амплитуды и фазы несущей частоты. Эти 256 комбинаций образуют так называемое „созвездие“ — диаграмму, каждая из 256 точек на которой является вершиной вектора, длина которого соответствует амплитуде, а угол наклона к оси — фазе колебания несущей частоты.

Каждому из 256 сочетаний амплитуды и фазы колебания несущей частоты в системе цифрового телевидения DVB C соответствует одно из 256 возможных сочетаний четырех битов двоичного сигнала [3].

Основные расчетные соотношения. Вероятность ошибочного приема сигнала с КАМ находится по формуле:

$$P=\sum_{l=1}^{m}\left[p(s_l)\sum_{\substack{j=1\\ j\neq l}}^{m}p(s_j/s_l)\right], \tag{1}$$

где $p(s_l)$ — вероятность передачи l-го сигнала s_l, $p(s_j/s_l)$ — вероятность ошибочного приема сигнала s_j при условии, что был передан сигнал s_l, m — число уровней сигнала, т.е. число возможных сигналов в поле сигналов КАМ. Здесь под вероятностью ошибочного приема сигнала понимается вероятность ошибочного приема символа, содержащего $k=\dfrac{\ln m}{\ln 2}$ бит.

Считая, что в передаче появление всех сигналов равновероятно, т.е. $p(s_l)=1/m$, запишем (1) в виде

$$P=\frac{1}{m}\sum_{l=1}^{m}\left[\sum_{\substack{j=1\\ j\neq l}}^{m}p(s_j/s_l)\right]. \tag{2}$$

Примем, что наибольший вклад в вероятность ошибки вносит ошибочный прием четырех соседних сигналов, ближайших к сигналу s_l, так как при всех реальных значениях вероятности ошибки, при которых передача данных еще имеет смысл, вероятность превышения последующего порогового уровня на порядок меньше, чем соседнего, и поэтому может не учитываться [4]. Поэтому при суммировании вероятностей ошибки приема пренебрежем всеми составляющими за исключением четырех ближайших:

$$P=\frac{1}{m}\sum_{l=1}^{m}\left[p(s_{l+1}/s_l)+p(s_{l+2}/s_l)+p(s_{l+3}/s_l)+p(s_{l+4}/s_l)\right]. \tag{3}$$

Формула (3) справедлива только в случае, когда для переданного сигнала s_l имеются все четыре ближайших сигнала. Однако на краях звездного поля КАМ, в том числе при $l=m$ (это зависит от принятой нумерации сигналов), это условие не выполняется. Здесь и далее пренебрегается этим обстоятельством, так как таких сигналов значительно меньше, чем тех, для которых формула (3) справедлива, и их вклад в вероятность ошибки незначителен.

Вероятность ошибочного приема одного сигнала при передаче другого зависит от расстояния между ними, которое соответствует энергии разности двух соседних сигналов созвездия КАМ [4]. В системе КАМ расстояния между соседними сигналами одинаковы, поэтому справедливы соотношения:

$$\begin{gathered}p\left(s_{l+1}/s_l\right)=p\left(s_2/s_1\right),\quad p\left(s_{l+2}/s_l\right)=p\left(s_3/s_1\right),\quad p\left(s_{l+3}/s_l\right)=p\left(s_4/s_1\right),\\ p\left(s_{l+4}/s_l\right)=p\left(s_5/s_1\right),\quad l=\overline{1,m}.\end{gathered} \tag{4}$$

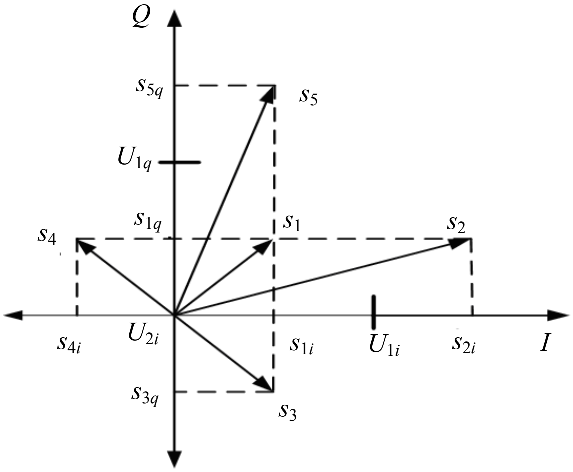
Следовательно, без потери общности можно принять, что передавался сигнал s_1. Подставив (4) в (3), получим выражение:

$$P=p(s_2/s_1)+p(s_3/s_1)+p(s_4/s_1)+p(s_5/s_1)\,. \tag{5}$$

Формирование КАМ сигнала при передаче и демодуляция сигнала при приеме производятся по квадратурным каналам I (inphase) и Q (quadrature). Выразим соотношение (5) через квадратурные составляющие сигналов:

$$p\left(s_2/s_1\right)=p\left(s_{2i}/s_{1i}\right)+p\left(s_{2q}/s_{1q}\right),\quad p\left(s_3/s_1\right)=p\left(s_{3i}/s_{1i}\right)+p\left(s_{3q}/s_{1q}\right),$$

$$p\left(s_4/s_1\right)=p\left(s_{4i}/s_{1i}\right)+p\left(s_{4q}/s_{1q}\right),\quad p\left(s_5/s_1\right)=p\left(s_{5i}/s_{1i}\right)+p\left(s_{5q}/s_{1q}\right).$$



При передаче сигнала s_1 и приеме его в канале I в соответствии с рисунком может быть принято правильное решение о передаче сигнала и возможны только два ошибочных решения — передан сигнал s_2 либо передан сигнал s_4. Поэтому вероятность ошибочных решений о передаче s_3 либо s_5 равна нулю, т.е.

$$p\left(s_{5i}/s_{1i}\right)=p\left(s_{3i}/s_{1i}\right)=0\,.$$

Рассуждая подобным образом о приеме сигнала в канале Q, запишем аналогичные равенства

$$p\left(s_{2q}/s_{1q}\right)=p\left(s_{4q}/s_{1q}\right)=0\,.$$

Подставим полученные соотношения в формулу (5):

$$P=p\left(s_{2i}/s_{1i}\right)+p\left(s_{4i}/s_{1i}\right)+p\left(s_{3q}/s_{1q}\right)+p\left(s_{5q}/s_{1q}\right). \tag{6}$$

Границами между сигналами в каналах, в соответствии с рисунком, являются следующие пороговые уровни U_{1i}, U_{2i}, U_{1q}, U_{2q} [4]:

$$U_{1i}=\frac{s_{2i}+s_{1i}}{2},\ U_{2i}=\frac{s_{4i}+s_{1i}}{2},\ U_{1q}=\frac{s_{5q}+s_{1q}}{2},\ U_{2q}=\frac{s_{3q}+s_{1q}}{2}. \tag{7}$$

При отклонении пороговых уровней от их номинальных значений (7) возникает отклонение вероятности ошибки от теоретического значения.

В теории допусков при небольших отклонениях принято использовать линейную часть ряда Тейлора. Поэтому связь между отклонением вероятности ошибки и отклонениями пороговых уровней определяется следующей формулой [1]:

$$d(\ln P)=A^P_{U_{1i}}d(\ln U_{1i})+A^P_{U_{2i}}d(\ln U_{2i})+A^P_{U_{1q}}d(\ln U_{1q})+A^P_{U_{2q}}d(\ln U_{2q}), \tag{8}$$

где $A^P_U=\dfrac{U}{P}\dfrac{dP}{dU}$ — чувствительность вероятности ошибки к изменению порогового уровня [1].

Выведем формулы для определения чувствительности, для этого прежде всего установим выражение для вероятности ошибки P. Из-за наличия шумов в сигнале s_1 его квадратурные составляющие являются случайными с математическим ожиданием S_{1i} и S_{1q}, имеют дисперсию σ^2 и распределены по нормальному закону.

Рассмотрим чувствительность вероятности ошибки к отклонению порогового уровня U_{1i}. При нормальном законе распределения шумов вероятность ошибочного приема сигнала s_{2i} при переданном сигнале s_{1i}, есть вероятность того, что сигнал s_i превосходит пороговое значение U_{1i}, т.е.

$$p\left({}^{s_{2i}}\!\big/_{s_{1i}}\right)=p\left(s_i>U_1\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{(s_{1i}-U_{1i})/\sigma}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}dt\,. \tag{9}$$

Распределение плотности вероятности сигнала принято нормальным исходя из теоремы, в соответствии с которой сумма достаточно большого числа не связанных или слабосвязанных случайных процессов приближенно подчиняется нормальному закону. Кроме того, многие шумовые процессы описываются именно принятой нами моделью [4].

Перейдем в (9) к производной:

$$\frac{dp(s_{2i}/s_{1i})}{dU_{1i}}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{\sigma}\exp\left(\frac{\left(s_{1i}-U_{1i}\right)^2}{\left(2\sigma\right)^2}\right). \tag{10}$$

Используя выражение (10) и определение чувствительности, получим формулы

$$A_{U_{1i}}^{p(s_{2i}/s_{1i})}=-\frac{U_{1i}\exp\left(\frac{-h^2}{2}\right)}{\sigma\int\limits_h^{\infty}\exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)dt}\quad, \tag{11}$$

$$h^2=\frac{\left(s_{1i}-U_{Ii}\right)^2}{\left(\sigma\right)^2}. \tag{12}$$

Обозначим $d=s_{1i}-U_{1i}$ — расстояние между средним и пороговым значением сигнала в канале I. Расстояние между соседними сигналами в этом же канале равно $2d$. Поэтому значение h^2 пропорционально отношению мощности разности соседних сигналов в канале I к мощности шума (в реальных системах передачи намного больше единицы).

Упростим выражение (11). Считая параметр h сколь угодно большим, получим неопределенность вида $\frac{0}{0}$, для устранения которой используем правило Лопиталя. Окончательно выражение имеет следующий вид:

$$A_{U_{1i}}^{p(s_{2i}/s_{1i})}=-\frac{U_{1i}h}{\sigma}. \tag{13}$$

Так как в (6) только первое слагаемое зависит от порогового уровня U_{1i}, то формула чувствительности вероятности ошибки к отклонению значения U_{1i} имеет вид

$$A_{U_{1i}}^{P}=\frac{p(s_{2i}/s_{1i})}{P}A_{U_{1i}}^{p(s_{2i}/s_{1i})}.$$

В силу эквидистантности точек поля сигналов КАМ значения всех слагаемых в (6) равны и формула для чувствительности записывается в виде

$$A_{U_{1i}}^{P}=-\frac{1}{4}\frac{U_{1i}h}{\sigma}. \tag{14}$$

Повторив проведенные преобразования для пороговых значений U_{2i}, U_{1q}, U_{2q}, получим следующие соотношения:

$$A^P_{U_{2i}} = \frac{1}{4}\frac{U_{2i}h}{\sigma}, \quad A^P_{U_{1q}} = -\frac{1}{4}\frac{U_{1q}h}{\sigma}, \quad A^P_{U_{2q}} = \frac{1}{4}\frac{U_{2q}h}{\sigma}. \tag{15}$$

В каждом из квадратурных каналов I и Q системы КАМ с m уровнями может появиться один из n равновероятных сигналов ($n=\sqrt{m}$). Мощность П в квадратурном канале, полученная усреднением значений мощности по всем равновероятным сигналам, находится по формуле [4]:

$$\Pi = \frac{n^2-1}{3}d^2. \tag{16}$$

Прибавив к разностному сигналу d среднее значение напряжения $\sqrt{\Pi}$ в квадратурном канале, получим среднее значение порогового уровня:

$$U_{\text{ср}} = d\left(1+\sqrt{\frac{n^2-1}{3}}\right).$$

С учетом (13) заменим в (15) значения пороговых уровней их средним значением:

$$A^P_{U_{1i}} = -A^P_{U_{2i}} = A^P_{U_{1q}} = -A^P_{U_{2q}},$$

$$A^P_{U_{1i}} = -\frac{d\left(1+\sqrt{\frac{n^2-1}{3}}\right)h}{4\sigma} = -\frac{\left(1+\sqrt{\frac{n^2-1}{3}}\right)h^2}{4}. \tag{17}$$

Выразим h через параметр отношение сигнал/шум (SNR). В соответствии с соотношением (13) $h^2 = d^2/\sigma^2$. Из (16) следует, что $d=\sqrt{\frac{3\Pi}{n^2-1}}$, таким образом,

$$h^2 = \frac{3\Pi}{\left(n^2-1\right)\sigma^2} = \frac{3SNR}{n^2-1}. \tag{18}$$

Все чувствительности в (17) равны по абсолютной величине и различаются только по знаку. В дальнейшем нам понадобится абсолютная величина чувствительности A, выражение для которой с учетом (18) имеет вид:

$$A = \frac{3\left(1+\sqrt{\frac{m-1}{3}}\right)SNR}{4(m-1)}, \tag{19}$$

где $m=n^2$ — число уровней сигнала в системе КАМ. Переменные m и n могут принимать только определенные значения (положительные целые числа начиная с 2). Это требование возникает исходя из свойств КАМ [5].

Расчет допусков. Так как пороговые уровни между сигналами в квадратурных каналах I и Q не зависят друг от друга, то и их отклонения в (9) являются независимыми случайными величинами. С учетом этого обстоятельства, применяя выражение (19), перейдем от отклонений в (9) к дисперсиям:

$$\sigma^2(d(\ln P)) = A^2[\sigma^2(d(\ln U_{1i})) + \sigma^2(d(\ln U_{2i})) + \sigma^2(d(\ln U_{1q})) + \sigma^2(d(\ln U_{2q}))]. \tag{20}$$

Для нормального закона распределения с вероятностью 0,997 выражение (20) по правилу „3σ“ записывается в виде

$$\Delta(\ln P) = 3A\sqrt{\sigma^2(d(\ln U_{1i})) + \sigma^2(d(\ln U_{2i})) + \sigma^2(d(\ln U_{1q})) + \sigma^2(d(\ln U_{2q}))},$$

где $\Delta(\ln P)$ — допуск на случайную величину отклонения вероятности ошибки от своего номинального значения. Применив правило „3σ“ к отклонениям пороговых уровней, получим следующее выражение для допусков:

$$\Delta(\ln P) = A\sqrt{\Delta^2(\ln U_{1i}) + \Delta^2(\ln U_{2i}) + \Delta^2(\ln U_{1q}) + \Delta^2(\ln U_{2q})}. \quad (21)$$

Как следует из (16), вероятность ошибки равночувствительна к отклонениям пороговых уровней от своих номинальных значений. Поэтому примем допуски на все пороговые уровни равными друг другу, т.е.

$$\Delta(\ln U_{1i}) = \Delta(\ln U_{2i}) = \Delta(\ln U_{1q}) = \Delta(\ln U_{2q}) = \Delta(\ln U).$$

Подставим это условие в (21) и получим следующую формулу для расчета допусков:

$$\Delta(\ln U) = \frac{\Delta(\ln P)}{2A}. \quad (22)$$

Это выражение является искомым и устанавливает связь между допуском и отклонением на параметр системы (пороговый уровень) и отклонением вероятности ошибки.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гехер К.* Теория чувствительности и допусков электронных цепей. М.: Сов. радио, 1973.
2. *Смирнов А. В., Пескин А. Е.* Цифровое телевидение: от теории к практике. М.: Горячая линия-Телеком, 2005.
3. ETSI TR 101 290 Digital Video Broadcasting (DVB); Measurment guidelines for DVB. 2001.
4. *Боккер П.* Передача данных. Техника связи в системах телеобработки данных. М.: Связь, 1980.
5. EN 300 429 Digital Video Broadcasting (DVB); Framing structure, channel coding and modulation for cable systems. 1998.

Сведения об авторах

Антон Юльевич Янушковский — аспирант; Санкт-Петербургский государственный университет кино и телевидения, кафедра технической электроники; E-mail: yanushkovskiy@mail.ru

Анатолий Валентинович Кривошейкин — д-р техн. наук, профессор; Санкт-Петербургский государственный университет кино и телевидения, кафедра технической электроники; E-mail: krivav@yandex.ru

Рекомендована кафедрой
технической электроники

Поступила в редакцию
05.11.09 г.