УДК 519.2

Н. В. Гирина

ОЦЕНКА ВЕРОЯТНОСТИ ПЕРВОГО ПЕРЕСЕЧЕНИЯ УРОВНЕЙ ГАУССОВЫМИ МАРКОВСКИМИ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЯМИ

Оцениваются вероятности времени первого пересечения постоянного и переменного уровней гауссовыми марковскими последовательностями конечного порядка с использованием геометрического и обобщенного геометрического распределений.

Ключевые слова: *вероятность времени первого пересечения, постоянный и переменный уровни, гауссова марковская последовательность.*

Одно из приложений задачи о пересечении случайным процессом неслучайного уровня — измерение интервалов между импульсными сигналами, оцениваемых разностью моментов пересечения заданных уровней фронтами сигналов. Решение этой задачи базируется на плотности распределения времени t_u первого пересечения уровня $u(t)$ (фронта сигнала) случайным процессом $x(t)$, описывающим шумовую составляющую.

Пересечениям посвящено множество отечественных публикаций (см., например, [1—3]). Общее решение на базе теории рядов Райса [4] трудно реализовать в инженерной практике. При условии дифференцируемости процесса $x(t)$ удается определить математическое ожидание и дисперсию времени t_u [1, 2, 5], дифференцируемость уровня $u(t)$ позволяет рассчитать плотность $f(t_u)$ для $x(t)$-гауссова марковского процесса первого порядка [6].

Оценить плотность $f(t_u)$ более простыми методами можно в пространстве дискретного времени посредством перехода к последовательностям $\mathbf{X}, \mathbf{U}$. Некоторые вопросы применения марковских моделей гауссовых последовательностей [7] к пересечению постоянных уровней рассмотрены в работе [8]. Цель настоящей статьи — распространить методику оценки плотности $f(t_u)$ на переменные уровни с использованием марковских моделей и геометрического распределения.

Пусть последовательности $\mathbf{X}, \mathbf{U}$ формируются на временном отрезке $[0,T]$ путем дискретизации процессов $x(t)$, $u(t)$ с интервалом Δ. Если начальные значения $x_0 < U_0$, первое пересечение возможно снизу вверх. Первое пересечение может произойти на *k*-м интервале дискретизации с вероятностью

$$f(t_k) = p\left\{(x_k > u_k)\bigcap\bigcap_{i=0}^{k-1}(x_i < u_i)\right\},\ k = 1, 2, ... \qquad (1)$$

Если принять $\Delta = 1$, а время t_u первого пересечения фиксировать как номер k первого выполнения неравенства $x_i > u_i$, $i = 0, 1, ..., k-1$, то совокупность значений $f(t_k)$ задает плотность распределения дискретного времени первого пересечения.

Если последовательность $\mathbf{X}$ не коррелирована (дискретный белый шум), вероятности (1) рассчитываются как произведения:

$$f(t_k) = p_k \prod_{i=0}^{k-1} (1 - p_i), \; p_i = p(x_i > u_i). \tag{2}$$

В случае коррелированой последовательности непосредственный расчет вероятностей (1) проблематичен даже для гауссовых последовательностей.

Пересечение постоянного уровня. Время первого пересечения постоянного уровня $\mathbf{U} = u$ дискретным белым шумом распределено по геометрическому закону [9]

$$f(t_k) = (1 - p_0)^k p_0, \; p_0 = p\{x > u\} = 1 - \Phi(u/\sigma), \tag{3}$$

соответствующему произведению (2) при $p_i = p_0$, здесь $\Phi(\lambda)$ — интеграл вероятности.

Выражение для плотности (3) можно обобщить на слабокоррелированные марковские последовательности конечного порядка n [8], задаваемые условием $\tau_0 << T$, где τ_0 — интервал корреляции последовательности $\mathbf{X}$. Замена немарковской последовательности марковской позволяет при расчете вероятностей ограничить число учитываемых составляющих. Вероятности пересечения уровня u первыми n значениями рассчитываются как

$$p_0 = p\{x > u\} = 1 - \Phi(u/\sigma),$$

$$p_k = \int_{-\infty}^{u} \ldots \int_{-\infty}^{u} \int_{u}^{\infty} f(x_0, \ldots, x_k) dx_0 \ldots dx_k, \; k = 1, \ldots, n-1. \tag{4}$$

При $k \geq n$ нормированные значения геометрической плотности [8]

$$\hat{f}(t_k) \approx p_k (1 - P) = (1 - P) p_n (1 - p_n)^{k-n}, \; P = \sum_{i=0}^{n-1} p_i, \tag{5}$$

описывают время первого пересечения уровня u.

Пример 1. Процесс $x(t) \in N(0, R(\tau))$ на временном отрезке $[0,30]$ дискретизируется с интервалом $\Delta = 0,5$; функция корреляции (рис. 1, *а*, кривая *1*) определяется как

$$R(\tau) = \exp(-\alpha\tau)\left[\cos(\beta\tau) + \frac{\alpha}{\beta}\sin(\beta\tau)\right], \; \alpha = 1/4, \; \beta = \pi/2.$$

Аппроксимация процесса $x(t)$ марковской последовательностью n-го порядка базируется на приведении матрицы точности к $2n+1$-диагональному виду [7]. Функция корреляции аппроксимирующей последовательности $\mathbf{X}$ порядка $n = 5$ показана на рис. 1, *а*, кривая *2* (марковский процесс менее инерционен); на рис. 1, *б* приведена гистограмма времени первого пересечения уровня $u = 1$ исходным процессом ($N = 5000$ траекторий) и марковской последовательностью $\mathbf{X}$ (пунктир).

Вероятности (4) получены статистическим моделированием пересечений последовательностью $\mathbf{X}$; для уровня $u = 1$ в одном из экспериментов они приняли следующие значения: $p_0 = 0,1618$, $p_1 = 0,0702$, $p_2 = 0,0786$, $p_3 = 0,0730$, $p_4 = 0,0700$, $p_5 = 0,0588$, из чего следует, что в результате расчета вероятностей (5) $p_n = 0,0588$, $1 - P = 0,5464$.

На рис. 1, *в*, *г* приведены гистограммы времени первого пересечения уровней $u = 1$ и $u = 2$ исходным процессом и оценки вероятностей (5), показанные пунктирными линиями.

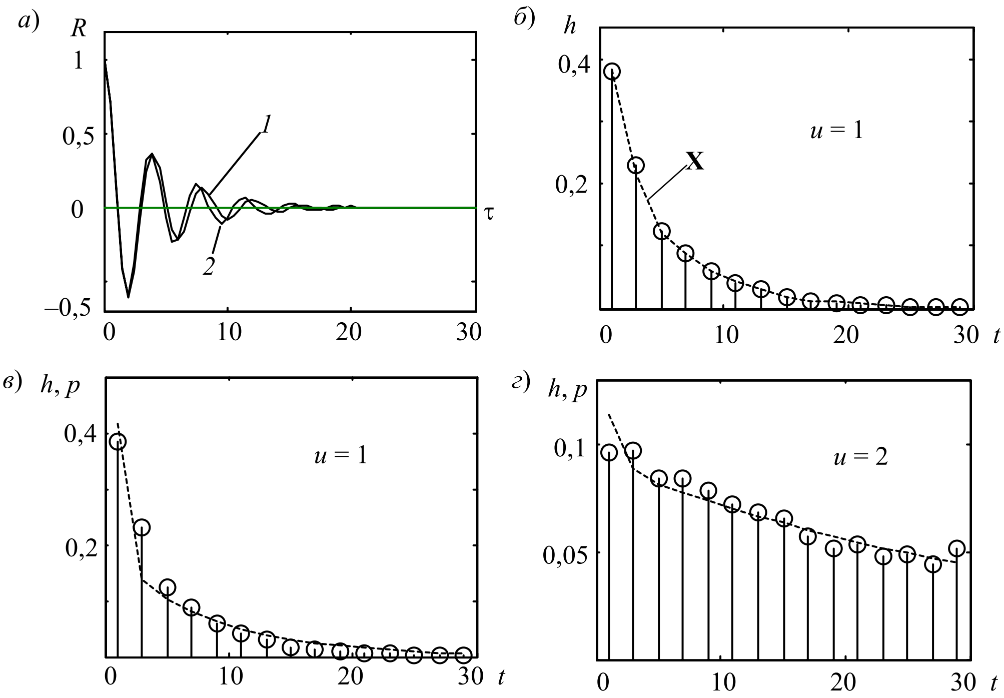

Рис. 1

Пересечение переменного уровня. Формула (1) по сути обобщает геометрическое распределение: если вероятности p_i наступления события в независимых экспериментах различны, вероятность первого его наступления в k-м эксперименте равна

$$P_k = p_k \prod_{i=1}^{k-1} \left(1 - p_i\right),\ k = 1, 2, ...$$

Вероятность пересечения уровня **U** сверху вниз гауссовой последовательностью **X** с нулевым средним на i-м интервале определяется как

$$p_i = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{u_i} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) dx = \Phi\left(\frac{u_i}{\sigma}\right),$$

где σ — среднее квадратическое отклонение.

Если пересекающий процесс аппроксимировать марковской последовательностью n-го порядка, обобщенное геометрическое распределение можно упростить: первые $n+1$ вероятностей P_k описываются интегралом (4), а вероятности первого пересечения в последующих интервалах — выражением

$$P_k \approx p_k \prod_{i=k-n}^{k-1} \left(1 - p_i\right),\ k \geq n + 2. \tag{6}$$

При этом расчет вероятностей по формуле (6) позволяет обеспечить сохранение произведения n сомножителей, что сокращает объем вычислений.

Пример 2. На рис. 2, *а* показан график (уровень) $u(t) = 8\Phi(t - 1{,}5) - 4$, имитирующий передний фронт импульсного сигнала, пересекаемый сверху вниз траекториями процесса $x(t) \in N\left(0, R(\tau)\right)$ при $R(\tau) = \exp\left(-\alpha|\tau|\right)\left[\cos(\beta\tau) + \alpha/\beta \sin\left(\beta|\tau|\right)\right]$, $\alpha = 3/2$, $\beta = \pi$. Процесс $x(t)$ дискретизируется с интервалом $\Delta = 0{,}2$ и аппроксимируется марковской последовательностью шестого порядка.

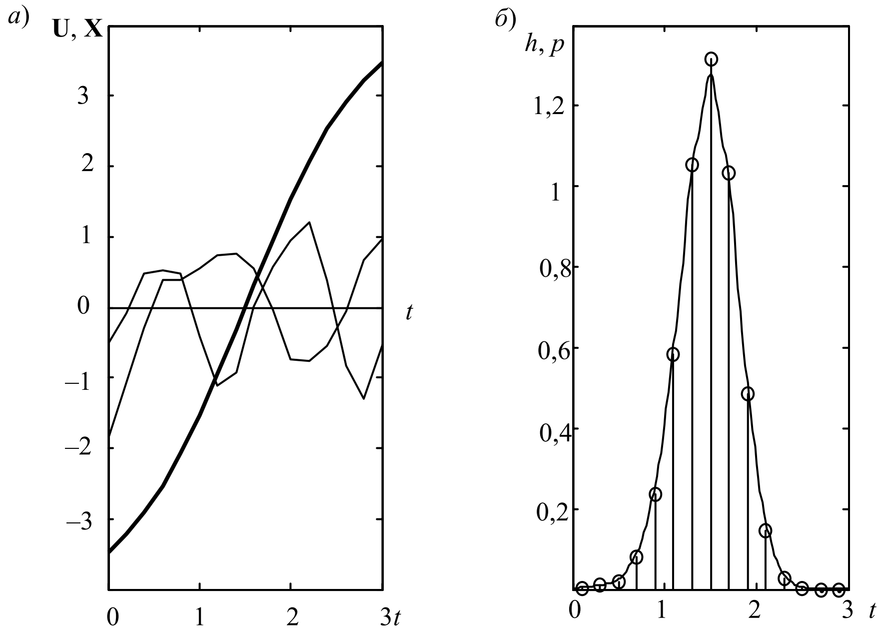

Рис. 2

Первые семь вероятностей P_k пересечения траекторий и заданного уровня получены статистическим моделированием по выборке $N = 10\,000$ траекторий. Следующие вероятности рассчитаны по формуле (6). По этой же выборке рассчитана гистограмма времени первого пересечения, показанная на рис. 2, *б*.

Метод аппроксимации стационарного гауссова процесса марковской последовательностью конечного порядка, предложенный в настоящей статье, может быть использован в инженерной практике оценивания времени прихода импульсных сигналов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Свешников А. А.* Прикладные методы случайных функций. Л.: Судпромгиз, 1961. 252 с.

2. *Тихонов В. И., Хименко В. И.* Проблема пересечений уровней случайными процессами. Радиофизические приложения // Радиотехника и электроника. 1998. Т. 43, № 5. С. 501—523.

3. *Семаков С. Л.* Выбросы случайных процессов: приложения в авиации. М.: Наука, 2005. 200 с.

4. *Мирошин Р. Н.* Пересечения кривых гауссовскими процессами. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1981. 212 с.

5. *Тихонов В. И.* Нелинейные преобразования случайных процессов. М.: Радио и связь, 1986. 296 с.

6. *Воробьев С. Н.* Пересечение гауссовым марковским процессом детерминированного уровня // Информационно-управляющие системы. 2004. № 2. С. 16—20.

7. *Воробьев С. Н., Гирина Н. В., Осипов Л. А.* Гауссовы марковские последовательности // Изв. вузов. Приборостроение. 2011. Т. 54, № 1. С. 23—31.

8. *Воробьев С. Н., Гирина Н. В.* Пересечение стационарных гауссовых последовательностей с неслучайными уровнями // Информационно-управляющие системы. 2009. № 3. С. 7—12.

9. *Королюк В. С.* и др. Справочник по теории вероятностей и математической статистике. М.: Наука, 1985. 640 с.

Сведения об авторе

Наталья Владимировна Гирина — аспирант; Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения; кафедра информационно-сетевых технологий; E-mail: natalia.girina@gmail.com

Рекомендована кафедрой информационно-сетевых технологий

Поступила в редакцию 07.09.11 г.