ЭЛЕКТРОННЫЕ И ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ УСТРОЙСТВА

УДК 621.396:681.323

С. И. Зиатдинов

СИНТЕЗ ОПТИМАЛЬНЫХ ЭКСТРАПОЛЯТОРОВ

Рассматривается вопрос оптимизации параметров экстраполятора с учетом как ширины спектра, так и центральной частоты случайного входного сигнала. Показано, что оптимизация весовых коэффициентов экстраполятора позволяет существенно снизить ошибки экстраполяции.

Ключевые слова: *дискретизация сигнала, экстраполирование, оптимизация, ошибки.*

При цифровой обработке непрерывные сигналы подвергаются дискретизации по времени и уровню. В результате в интервалах между отсчетами теряется информация, частичное восстановление которой возможно с использованием экстраполяторов различных порядков [1].

В общем случае алгоритм работы экстраполятора вытекает из разложения сигнала в окрестности момента времени t_0 в степенной ряд Тейлора [2]:

$$s(t)=s(t_0)+\frac{t-t_0}{1}s'(t_0)+\frac{(t-t_0)^2}{1\cdot 2}s''(t_0)+...+\frac{(t-t_0)^n}{n!}s^{(n)}(t_0)=\sum_{n=0}^{\infty}s^{(n)}(t_0)\frac{(t-t_0)^n}{n!}, \quad (1)$$

где $s^{(n)}(t_0)$ — n-я производная сигнала в момент времени t_0.

Рассмотрим непрерывные и дискретные экстраполяторы нулевого и первого порядков.

Непрерывный экстраполятор нулевого порядка. При использовании в выражении (1) только первого слагаемого получаем экстраполятор нулевого порядка, для которого сигнал

$$s_э(t+\tau)=s(t), \quad (2)$$

где τ — время экстраполяции.

Очевидно, что ограничение числа членов ряда (1) неизбежно приводит к ошибке экстраполяции, дисперсия которой в данном случае определяется следующим образом:

$$\sigma_э^2=\overline{[s(t+\tau)-s_э(t+\tau)]^2}. \quad (3)$$

Черта сверху в выражении (3) означает статистическое усреднение.

Используя соотношение (2), нетрудно показать, что для стационарного сигнала

$$\sigma_э^2=2\sigma^2[1-r(\tau)], \quad (4)$$

где σ^2, $r(\tau)$ — дисперсия и коэффициент корреляции сигнала $s(t)$.

Оптимальный непрерывный экстраполятор нулевого порядка. В целях минимизации ошибки экстраполяции представим алгоритм работы оптимального непрерывного экстраполятора нулевого порядка в виде

$$s_э(t+\tau) = as(t),$$

где a — весовой коэффициент.

Найдем значение весового коэффициента a, обеспечивающего наименьшую ошибку экстраполяции. Аналогично соотношению (3) можно записать, что в данном случае

$$\sigma_э^2 = \overline{[s(t+\tau) - as(t)]^2} = \sigma^2[1 + a^2 - 2ar(\tau)]. \quad (5)$$

Для определения оптимального значения коэффициента a возьмем от дисперсии ошибки экстраполяции производную по a и приравняем ее к нулю:

$$\frac{d\sigma_э^2}{da} = 2\sigma^2[a - r(\tau)] = 0.$$

Из данного соотношения находим, что минимальная дисперсия ошибки экстраполяции при $a = r(\tau)$ составит

$$\sigma_{э\min}^2 = \sigma^2[1 - r^2(\tau)]. \quad (6)$$

В результате выигрыш в величине ошибки экстраполяции при использовании оптимального коэффициента a определим в виде отношения дисперсий ошибок, соответствующих выражениям (4) и (6):

$$\frac{\sigma_э^2}{\sigma_{э\min}^2} = \frac{2[1 - r(\tau)]}{1 - r^2(\tau)} = \frac{2}{1 + r(\tau)}.$$

Для получения конкретных численных результатов примем следующий коэффициент корреляции сигнала:

$$r(\tau) = \exp(-\Delta\omega^2\tau^2)\cos(\omega_0\tau),$$

где $\Delta\omega, \omega_0$ — ширина и средняя частота спектральной плотности сигнала.

Тогда получим, что

$$\frac{\sigma_э^2}{\sigma_{э\min}^2} = \frac{2}{1 + \exp(-\Delta\omega^2\tau^2)\cos(\omega_0\tau)}.$$

Результаты расчетов относительных среднеквадратических ошибок экстраполяции $\sigma_э/\sigma$, $\sigma_{э\min}/\sigma$ и квадрата их отношения для различных значений произведения $\Delta\omega\tau$ при $\omega_0 = 0$ представлены в табл. 1.

Таблица 1

$\Delta\omega\tau$	0,02	0,05	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6
$\sigma_э/\sigma$, %	2,83	7,07	14,11	28,00	41,49	54,38	66,51	77,76
$\sigma_{э\min}/\sigma$, %	2,83	7,06	14,07	27,73	40,59	52,33	62,73	71,64
$\sigma_э^2/\sigma_{э\min}^2$	1,00	1,00	1,01	1,02	1,04	1,08	1,12	1,18

Из полученных результатов следует, что при $\omega_0 = 0$ оптимизация параметров экстраполятора нулевого порядка дает незначительный выигрыш относительно ошибки экстраполяции. В табл. 2 представлены результаты расчетов относительных среднеквадратических ошибок экстраполяции и их отношения для различных значений произведения $\omega_0\tau$ при ширине спектральной плотности сигнала $\Delta\omega = 0$.

Таблица 2

$\omega_0\tau$	0,01	0,04	0,08	0,16	2,98	3,06	3,10	3,12	3,13
$\sigma_э/\sigma$, %	1,0	4,0	8,0	16,0	200	200	200	200	200
$\sigma_{э\min}/\sigma$, %	1,0	4,0	8,0	16,0	16,0	8,0	4,0	2,0	1,0
$\sigma_э/\sigma_{э\min}$	1,0	1,0	1,0	1,0	12,5	25,0	50,0	100	200

Анализируя данные табл. 2, можно отметить, что в диапазоне $0 \le \omega_0\tau \le 0{,}3$ оптимальный экстраполятор не обеспечивает уменьшение ошибки экстраполяции. В то же время при $\omega_0\tau \ge 3$ ошибка экстраполяции не превышает 10 % и меньше ошибки неоптимального экстраполятора в 25—200 раз.

Дискретный экстраполятор нулевого порядка. Алгоритм работы данного экстраполятора записывается следующим образом [1]:

$$s_э(t_i + \tau) = s(t_i),$$

где $s(t_i)$ — i-й отсчет сигнала; $t_i = iT$; T — период дискретизации; i = 0, 1, 2, 3, … — номер отсчета.

При этом дисперсия ошибки экстраполяции определяется из соотношения

$$\sigma_э^2 = \overline{[s(t_i + \tau) - s_э(t_i + \tau)]^2},$$

которое после несложных преобразований приводится к виду

$$\sigma_э^2 = 2\sigma^2[1 - r(\tau)]. \tag{7}$$

Полученное выражение (7) для дисперсии ошибки экстраполяции совпадает с аналогичным выражением (4) для непрерывного экстраполятора.

Оптимальный дискретный экстраполятор нулевого порядка. Для данного экстраполятора можно записать следующий алгоритм работы:

$$s_э(t_i + \tau) = as(t_i).$$

Опуская несложные выкладки, аналогичные алгоритму работы непрерывного экстраполятора, оптимальное значение весового коэффициента a, минимизирующего ошибку экстраполяции, можно определить как $a = r(\tau)$. При этом дисперсия ошибки экстраполяции определяется соотношением

$$\sigma_{э\min}^2 = \sigma^2[1 - r^2(\tau)].$$

Данное выражение полностью совпадает с выражением (6) для дисперсии минимальной ошибки непрерывного экстраполятора нулевого порядка.

Непрерывный экстраполятор первого порядка. При использовании в выражении (1) первых двух слагаемых получаем алгоритм работы рассматриваемого экстраполятора:

$$s_э(t + \tau) = s(t) + s'(t)\tau.$$

Дисперсия ошибки экстраполяции в данном случае определяется соотношением

$$\sigma_э^2 = \overline{[s(t + \tau) - s_э(t + \tau)]^2} = 2\sigma^2[1 - r(\tau) - 0{,}5r''(0)\tau^2 + r'(\tau)\tau - r'(0)\tau],$$

где $r'(\tau), r''(\tau)$ — первая и вторая производные коэффициента корреляции $r(\tau)$ сигнала $s(t)$.

Оптимальный непрерывный экстраполятор первого порядка. Алгоритм работы данного экстраполятора представим в виде

$$s_э(t + \tau) = a_0 s(t) + a_1 s'(t)\tau,$$

при этом дисперсия ошибки экстраполяции будет определяться выражением

$$\sigma_э^2 = \sigma^2[1 + a_0^2 - 2a_0 r(\tau) - a_1^2 r''(0)\tau^2 + 2a_1 r'(\tau)\tau - 2a_0 a_1 r'(0)\tau].$$

Подбором весовых коэффициентов a_0 и a_1 минимизируем ошибку экстраполяции. Для этого возьмем частные производные от $\sigma_э^2$ по a_0 и a_1 и приравняем их к нулю:

$$\frac{d\sigma_э^2}{da_0} = 2\sigma^2[a_0 - r(\tau) - a_1 r'(0)\tau] = 0, \quad \frac{d\sigma_э^2}{da_1} = -2\sigma^2[a_1 r''(0)\tau^2 - r'(\tau)\tau + a_0 r'(0)\tau] = 0.$$

Решая данную систему уравнений относительно коэффициентов a_0 и a_1, находим, что

$$a_0 = \frac{r(\tau)r''(0) + r'(\tau)r'(0)}{r''(0) - [r'(0)]^2}, \quad a_1 = \frac{r'(\tau) + r(\tau)r'(0)}{\{r''(0) - [r'(0)]^2\}\tau}.$$

После подстановки в полученные выражения для a_0 и a_1 коэффициента корреляции сигнала $r(\tau) = \exp(-\Delta\omega^2\tau^2)\cos(\omega_0\tau)$ можно в окончательном виде записать:

$$a_0 = \exp(-\Delta\omega^2\tau^2)\cos(\omega_0\tau), \quad a_1 = \frac{\exp(-\Delta\omega^2\tau^2)[2\tau\Delta\omega^2\tau\cos(\omega_0\tau) + \omega_0\sin(\omega_0\tau)]}{(2\Delta\omega^2 + \omega_0^2)\tau}.$$

Тогда дисперсии ошибок экстраполяции $\sigma_э^2, \sigma_{эmin}^2$ будут определяться выражениями

$$\sigma_э^2 = 2\sigma^2\{1 - \exp(-\Delta\omega^2\tau^2)\cos(\omega_0\tau) + \Delta\omega^2\tau^2 + 0{,}5\omega_0^2\tau^2 -$$
$$-2\Delta\omega^2\tau^2\exp(-\Delta\omega^2\tau^2)\cos(\omega_0\tau) - \omega_0\tau\exp(-\Delta\omega^2\tau^2)\sin(\omega_0\tau)\}, \qquad (8)$$

$$\sigma_{эmin}^2 = \sigma^2\left\{1 - \exp(-2\Delta\omega^2\tau^2)\cos^2(\omega_0\tau) - \right.$$
$$\left. - \frac{\exp(-2\Delta\omega^2\tau^2)[2\Delta\omega^2\tau\cos(\omega_0\tau) + \omega_0\sin(\omega_0\tau)]^2}{2\Delta\omega^2 + \omega_0^2}\right\}. \qquad (9)$$

Для получения конкретных результатов рассмотрим частные случаи. Положим среднюю частоту сигнала $\omega_0 = 0$. Тогда соотношения (8) и (9) примут следующий вид:

$$\sigma_э^2 = 2\sigma^2\{1 - \exp(-\Delta\omega^2\tau^2) + \Delta\omega^2\tau^2[1 - 2\exp(-\Delta\omega^2\tau^2)]\},$$
$$\sigma_{эmin}^2 = \sigma^2[1 - \exp(-2\Delta\omega^2\tau^2)(1 + 2\Delta\omega^2\tau^2)].$$

Результаты расчетов относительных среднеквадратических ошибок $\sigma_э/\sigma$, $\sigma_{эmin}/\sigma$, а также квадрата их отношения приведены в табл. 3.

Таблица 3

$\Delta\omega\tau$	0,02	0,05	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6
$\sigma_э/\sigma$, %	$6{,}93\cdot10^{-2}$	$4{,}33\cdot10^{-1}$	1,73	6,85	15,2	26,5	40,43	56,6
$\sigma_{эmin}/\sigma$, %	$5{,}66\cdot10^{-2}$	$3{,}53\cdot10^{-1}$	1,40	5,51	12,0	20,4	30,0	40,3
$\sigma_э^2/\sigma_{эmin}^2$	1,50	1,50	1,51	1,53	1,61	1,69	1,81	1,97

Сравнивая данные табл. 1 и 3, можно отметить, что применение экстраполятора первого порядка позволяет при $\Delta\omega\tau < 0{,}1$ практически на порядок уменьшить ошибку экстраполяции. При этом оптимизация параметров экстраполятора также уменьшает ошибку экстраполяции более чем в 1,5 раза по сравнению с неоптимальным экстраполятором.

Рассмотрим случай, когда ширина спектральной плотности сигнала $\Delta\omega = 0$. Тогда

$$a_0 = \cos(\omega_0\tau), \ a_1 = \sin(\omega_0\tau)/\omega_0\tau,$$

$$\sigma_э^2 = \sigma^2\{2[1 - \cos(\omega_0\tau)] + \omega_0^2\tau^2 - 2\omega_0\tau\sin(\omega_0\tau)\}, \ \sigma_{эmin}^2 = 0.$$

В табл. 4 показаны результаты расчетов нормированной среднеквадратической ошибки $\sigma_э/\sigma$ при $\Delta\omega = 0$ для различных значений произведения $\omega_0\tau$.

Таблица 4

$\omega_0\tau$	0,01	0,04	0,08	0,16	0,32	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
$\sigma_э/\sigma$, %	0,005	0,08	0,32	1,28	5,11	7,96	12,4	17,8	24,2	31,4

Сравнивая данные табл. 2 и 4, можно отметить, что экстраполятор первого порядка по сравнению с экстраполятором нулевого порядка обеспечивает уменьшение ошибки экстраполяции более чем на порядок. При этом оптимизация параметров экстраполятора первого порядка позволяет свести к нулю ошибку экстраполяции.

Дискретный экстраполятор первого порядка. Для вычисления первой производной сигнала в выражении (1) воспользуемся первой обратной разностью. При этом

$$s'(t_i) = \frac{s(t_i) - s(t_i - T)}{T} .$$

Тогда алгоритм работы дискретного экстраполятора первого порядка можно записать следующим образом:

$$s_э(t_i + \tau) = \left(1 + \frac{\tau}{T}\right) s(t_i) - \frac{\tau}{T} s(t_i - T).$$

Опуская промежуточные выкладки, запишем выражение для дисперсии ошибки экстраполяции:

$$\sigma_э^2 = \sigma^2 \left[1 + \left(1 + \frac{\tau}{T}\right)^2 + \frac{\tau^2}{T^2} - 2\left(1 + \frac{\tau}{T}\right) r(\tau) + 2\frac{\tau}{T} r(\tau + T) - 2\left(1 + \frac{\tau}{T}\right)\frac{\tau}{T} r(T)\right].$$

Результаты расчета относительной среднеквадратической ошибки экстраполяции для дискретного неоптимального экстраполятора первого порядка при $\Delta\omega = 0$ и $\tau = T$ для различных значений произведения $\omega_0\tau$ приведены в табл. 5.

Таблица 5

$\omega_0\tau$	0,01	0,04	0,08	0,16	0,32	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
$\sigma_э/\sigma$, %	0,01	0,16	0,64	2,55	10,1	15,8	24,5	34,9	47,0	60,7

Оптимальный дискретный экстраполятор первого порядка. Алгоритм работы данного экстраполятора имеет вид

$$s_э(t_i + \tau) = a_0 \left(1 + \frac{\tau}{T}\right) s(t_i) - a_1 \frac{\tau}{T} s(t_i - T),$$

при этом ошибка экстраполяции определяется следующим выражением:

$$\sigma_э^2 = \sigma^2 \left[1 + a_0^2 \left(1 + \frac{\tau}{T}\right)^2 + a_1^2 \frac{\tau^2}{T^2} - 2a_0 \left(1 + \frac{\tau}{T}\right) r(\tau) + 2a_1 \frac{\tau}{T} r(\tau + T) - 2a_0 a_1 \left(1 + \frac{\tau}{T}\right)\frac{\tau}{T} r(T)\right].$$

Аналогично предыдущим случаям выбором весовых коэффициентов a_0 и a_1 минимизируем ошибку экстраполяции.

Система уравнений, позволяющая найти оптимальные значения коэффициентов a_0, a_1, имеет следующий вид:

$$\frac{d\sigma_э^2}{da_0} = 2\sigma^2 \left(1 + \frac{\tau}{T}\right)\left[a_0 \left(1 + \frac{\tau}{T}\right) - r(\tau) + 2a_1 \frac{\tau}{T} r(T)\right] = 0,$$

$$\frac{d\sigma_э^2}{da_1} = 2\sigma^2 \frac{\tau}{T}\left[a_1 \frac{\tau}{T} - r(\tau + T) + a_0 \left(1 + \frac{\tau}{T}\right) r(T)\right] = 0.$$

Решая данную систему уравнений относительно искомых коэффициентов, находим

$$a_0 = \frac{r(\tau)}{1 + \frac{\tau}{T}} - \frac{r(\tau + T) - r(T) r(\tau)}{[1 - r^2(T)]\left(1 + \frac{\tau}{T}\right)} r(T), \quad a_1 = \frac{r(\tau + T) - r(T) r(\tau)}{[1 - r^2(T)]\frac{\tau}{T}}.$$

Результаты расчетов нормированных ошибок $\sigma_э/\sigma$, $\sigma_{э\min}/\sigma$, а также их отношения $\sigma_э/\sigma_{э\min}$ для неоптимального и оптимального дискретных экстраполяторов первого порядка при различных значениях произведения $\Delta\omega\tau$ и $\omega_0 = 0$, $\tau = T$, $r(\tau) = \exp(-\Delta\omega^2\tau^2)\cos(\omega_0\tau)$ приведены в табл. 6.

Таблица 6

$\Delta\omega\tau$	0,02	0,05	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6
$\sigma_э/\sigma$, %	0,138	0,864	3,435	13,41	28,97	48,73	71,11	94,47
$\sigma_{э\min}/\sigma$, %	0,113	0,70	2,79	10,66	22,31	35,98	49,87	62,58
$\sigma_э/\sigma_{э\min}$	1,50	1,51	1,52	1,58	1,68	1,83	2,03	2,28

Анализ полученных данных показывает, что оптимизация параметров экстаполятора позволяет в 1,5 раза снизить ошибку экстраполяции, а при ширине спектральной плотности сигнала $\Delta\omega = 0$ оптимальный экстраполятор обеспечивает нулевую ошибку экстраполяции: $\sigma_{э\min} = 0$.

Выводы. Оптимизация параметров экстраполяторов нулевого и первого порядков с учетом ширины спектральной плотности сигнала не дает заметного уменьшения ошибки экстраполяции. Вместе с тем оптимизация параметров экстраполяторов с учетом средней частоты спектральной плотности сигнала позволяет более чем на порядок снизить ошибку экстраполяции.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Зиатдинов С. И.* Линейные искажения сигнала экстраполяторами // Изв. вузов. Приборостроение. 2007. Т. 50, № 5. С. 57—60.

2. *Пискунов Н. С.* Дифференциальное и интегральное исчисления. М.: Наука, 1966. Т. 1. 551 с.

Сведения об авторе

Сергей Ильич Зиатдинов — д-р. техн. наук, профессор; Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения, кафедра информационно-сетевых технологий; E-mail: Kaf53@GUAP.ru

Рекомендована кафедрой информационно-сетевых технологий

Поступила в редакцию 18.05.11 г.