УДК 62-50

О. В. Слита, А. В. Ушаков

ОБОБЩЕННОЕ МОДАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ В ЗАДАЧЕ СИНТЕЗА ПАРАМЕТРИЧЕСКИ ИНВАРИАНТНЫХ ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ*

Рассматривается дискретный объект управления с неопределенностью в матрице состояния. Задача обеспечения инвариантности решается за счет использования свойств спектров собственных значений и собственных векторов матричной функции от матрицы с привлечением возможностей обобщенного модального управления. Приводится пример.

Ключевые слова: *дискретный объект, неопределенность матрицы состояния, собственные векторы, обобщенное модальное управление.*

Введение. При синтезе систем с применением классической теории управления используется положение о том, что математическая модель объекта известна и абсолютно точно описывает его поведение. Однако современные подходы к постановке и решению задач анализа и синтеза систем управления характеризуются наличием положения о неопределенности задания модели объекта [1—3], в частности, о неточности знания ее параметров. В настоящей работе рассматривается дискретный объект управления с неопределенностью матрицы состояния.

Постановка задачи. Рассмотрим дискретный объект управления (ОУ) следующего вида

$$x(k+1) = (A+\Delta A)x(k) + Bu(k)\,,\ y(k) = Cx(k)\,, \tag{1}$$

в котором $x \in R^n$, $u \in R^r$, $y \in R^m$ — векторы состояния, управления и выхода; $A \in R^{n\times n}$, $B \in R^{n\times r}$, $C \in R^{m\times n}$ — матрицы состояния, управления и выхода; ΔA — матрица состояния с неточно заданными параметрами.

При функционировании ОУ (1) в составе системы на его выходе $y(k)$ воспроизводится внешнее задающее воздействие $g(k)$ с требуемыми показателями качества. Построим закон управления (ЗУ) в форме прямой связи по задающему воздействию с матрицей K_g и отрицательной обратной связи по вектору состояния с матрицей K. Предположим также, что переменные состояния и задающее воздействие доступны измерению. Тогда ЗУ принимает вид

$$u(k) = K_g g(k) - Kx(k)\,. \tag{2}$$

Объединив ЗУ (2) с ОУ (1), получим замкнутую систему вида

$$x(k+1) = Fx(k) + Gg(k) + \Delta Ax(k)\,;\ y(k) = Cx(k)\,, \tag{3}$$

где $F = A - BK$, $G = BK_g$.

Синтезируемый закон управления должен обеспечивать параметрическую инвариантность выхода системы $y(k)$ к неопределенности ΔA задания матрицы состояния исходного дискретного объекта

$$y(k, g(k), F, \Delta A \neq 0) = y(k, g(k), F, \Delta A \equiv 0)\,. \tag{4}$$

---

* Работа выполнена при финансовой поддержке ФЦП „Научные и научно-педагогические кадры инновационной России“ на 2009—2013 гг. (соглашение № 14.B37.21.0875).

Основной результат. Представим матрицу ΔA в виде суммы минимального числа матричных компонентов, каждый из которых характеризуется единичным рангом

$$p = \arg\min_{p} \left\{ \Delta A = \sum_{j=1}^{p} \Delta A_j \ \& \ \mathrm{rank}\Delta A_j = 1 \right\}. \qquad (5)$$

С использованием выражения (5) член $\Delta Ax(k)$ в (3) можно записать в форме

$$\Delta Ax(k) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta A_{11} & \Delta A_{12} & \dots & \Delta A_{1n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_n(k) \end{bmatrix} +$$

$$+ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta A_{21} & \Delta A_{22} & \dots & \Delta A_{2n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_n(k) \end{bmatrix} + \dots + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta A_{n1} & \Delta A_{n2} & \dots & \Delta A_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_n(k) \end{bmatrix}. \qquad (6)$$

Представим цепочку соотношений (6) в компактной форме. Для этого на левых сомножителях аддитивных векторно-матричных компонентов построим $(n \times p)$-матрицу D в форме

$$D = \mathrm{row}\{D_j, j = \overline{1, p}\}$$

и введем в рассмотрение p-мерный вектор параметрического воздействия $\zeta(k)$

$$\zeta(k) = \mathrm{col}\left\{\zeta_j(k),\ j = \overline{1, p}\right\}, \qquad (7)$$

компоненты которого $\zeta_j(k)$ задаются соотношениями

$$\zeta_j(k) = \begin{bmatrix} \Delta A_{j1} & \Delta A_{j2} & \dots & \Delta A_{jn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_n(k) \end{bmatrix} = (\Delta A)^j x(k). \qquad (8)$$

Здесь $(\Delta A)^j$ — j-я строка матрицы ΔA. Используя (7) и (8), представим матрично-векторный компонент $\Delta Ax(k)$ как

$$\Delta Ax(k) = \sum_{j=1}^{p} D_j \zeta_j(k) = D\zeta(k).$$

Перейдем к представлению системы (3) в форме

$$x(k+1) = Fx(k) + Gg(k) + D\zeta(k);\ y(k) = Cx(k), \qquad (9)$$

не содержащей матричных неопределенностей, но характеризующейся дополнительным параметрическим воздействием $\zeta(k)$ на выход $y(k)$.

Модель (9) позволяет переформулировать поставленную задачу обеспечения параметрической инвариантности как задачу обеспечения сигнальной инвариантности

$$y(k, F, g(k), \zeta(k) \neq 0) = y(k, F, g(k), \zeta(k) \equiv 0). \qquad (10)$$

Переходя к передаточным функциям, перепишем (10) следующим образом:

$$Y(z, g(z), \zeta(z) \neq 0) = \Phi_{yg}(z) g(z) + \Phi_{y\zeta}(z) \zeta(z) = \Phi_{yg}(z) g(z), \quad (11)$$

где $g(z)$ — Z-преобразование задающего воздействия $g(t)$, $\zeta(z)$ — Z-преобразование параметрического воздействия $\zeta(k)$, $\Phi_{yg}(z)$ — передаточная функция отношения „задающее воздействие — выход системы", $\Phi_{y\zeta}(z)$ — передаточная функция отношения „параметрическое воздействие — выход системы".

Очевидно, что равенство (11) при $\zeta(z) \neq 0$ выполняется, когда

$$\Phi_{y\zeta}(z) = 0. \quad (12)$$

Покажем, какими алгебраическими свойствами должны обладать матричные компоненты модели (9), чтобы выполнялось соотношение (12).

Утверждение. Для того чтобы система (9) обладала параметрической инвариантностью в смысле условия (10), достаточно, чтобы

1) столбцы D_j матрицы D были бы собственными векторами матрицы F;

2) столбцы D_j принадлежали ядру матрицы C, т.е. чтобы выполнялось соотношение

$$CD_j = 0. \quad (13)$$

Доказательство. Если D_j является собственным вектором матрицы F, соответствующим ее собственному значению λ_j, то становится [4] справедливым равенство

$$FD_j = \lambda_j D_j.$$

Будем использовать свойство матричной функции от матрицы сохранять геометрический спектр собственных векторов исходной матрицы и иметь в качестве элементов алгебраического спектра собственных значений компоненты $f(\lambda_j)$ [4], тогда будет справедливо соотношение

$$f(F) D_j = f(\lambda_j) D_j.$$

В решаемой задаче матричной функцией от матрицы F является резольвента $f(F) = \left(zI - F\right)^{-1}$, входящая в выражение для передаточной функции $\Phi_{y\zeta_j}(z)$:

$$\Phi_{y\zeta_j}(z) = C(zI - F)^{-1} D_j = C(z - \lambda_j)^{-1} D_j = (z - \lambda_j)^{-1} CD_j. \quad (14)$$

Подстановка в соотношение (14) условия (13) приводит к выполнению соотношений (11), (12).

Для решения задачи синтеза параметрически инвариантной системы воспользуемся обобщенным модальным управлением [3, 5—7]. Рассмотрим сначала случай [5, 7], когда матрица управления B является матрицей полного ранга ($\operatorname{rank} B = n$, n — размерность вектора состояния $x(k)$ ОУ). Тогда задача параметрической инвариантности может быть решена с помощью матрицы обратных связей K в форме $K = B^{-1}(AM - M\Lambda)M^{-1}$, где $M = \operatorname{row}\left\{\xi_i, i = \overline{1,n}\right\}$, $\Lambda = \operatorname{diag}\left\{\lambda_i, i = \overline{1,n}\right\}$. В этом случае, задавая в качестве столбцов матрицы M столбцы матрицы D, можно обеспечить в системе желаемую структуру собственных векторов. Матрицу K получим, решив систему уравнений Сильвестра:

$$M\Lambda - AM = -BH, \quad (15)$$

$$K = HM^{-1}.$$

В случае, когда $\operatorname{rank} B < n$, уравнение (15) распадается на

$$D\Lambda_D - AD = -BH_D, \tag{16}$$

$$\bar{M}\,\bar{\Lambda} - A\bar{M} = -B\bar{H}, \tag{17}$$

причем условием разрешимости уравнения (16) относительно матрицы H_D является включение столбца D_j: $\left(\lambda_j I - A\right)D_j \in \operatorname{Im} B$ [6, 7]. Уравнение (17) при заданной наблюдаемой паре $\left(\bar{\Lambda}, \bar{H}\right)$ решается относительно матрицы $\bar{M}$. Матрица обратных связей K в этом случае находится следующим образом:

$$K = \begin{bmatrix} H_D & \bar{H} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D & \bar{M} \end{bmatrix}^{-1}.$$

Пример. Рассмотрим дискретный ОУ вида (1) с матрицами

$$A + \Delta A = \begin{bmatrix} q+1 & q+0,1 & 0,004837 \\ -2q & -2q+1 & 0,0951 \\ 4q & 4q & 0,9048 \end{bmatrix},\ A = \begin{bmatrix} 1 & 0,1 & 0,004837 \\ 0 & 1 & 0,0951 \\ 0 & 0 & 0,9048 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 0,0001626 \\ 0,004837 \\ 0,09516 \end{bmatrix},\ C = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \end{bmatrix},$$

где

$$\Delta A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \\ 4 & 4 & 0 \end{bmatrix} q = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q & q & 0 \end{bmatrix} = Dh(q)$$

представлена в параметризованном q виде ($q = q_0 + \Delta q$, с номинальным значением $q_0 = 0$ и вариацией Δq), $D = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \end{bmatrix}^T$.

В результате синтеза ЗУ получим

$$F = A - BK = \begin{bmatrix} 0,9917 & 0,0928 & 0,003152 \\ -0,2206 & 0,8057 & 0,04867 \\ -3,407 & -3,092 & -0,1244 \end{bmatrix}.$$

Собственные значения дискретной матрицы F $\lambda_1 = 0,8188$, $\lambda_2 = 0,6062$, $\lambda_3 = 0,4968$. Матрица-столбец $D = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \end{bmatrix}^T$ соответствует собственному значению $\lambda_{1D} = 0,8188$. Условие $CD = 0$ выполняется, следовательно $\Phi_{y\zeta}(z) = 0$. Таким образом, дискретная система обладает параметрической инвариантностью выхода. Экспериментально это можно проверить для любого внешнего воздействия $g(k)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ackermann J.* Robust control systems with uncertain physical parameters. London: Springer-Verlag, 1993.
2. *Мирошник И. В., Никифоров В. О., Фрадков А. Л.* Нелинейное и адаптивное управление сложными динамическими системами. СПб: Наука, 2000.
3. *Никифоров В. О., Слита О. В., Ушаков А. В.* Интеллектуальное управление в условиях неопределенности. СПб: СПбГУ ИТМО, 2011.
4. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. М.: Наука, 1973.
5. *Ушаков А. В.* Обобщенное модальное управление // Изв. вузов. Приборостроение. 2002. Т. 43, № 3. С. 8—15.
6. *Слита О. В., Ушаков А. В.* Обеспечение инвариантности выхода непрерывной системы относительно экзогенных сигнальных и эндогенных параметрических возмущений: алгебраический подход // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2008. № 4. С. 24—32.

7. *Слита О. В., Ушаков А. В.* Достаточные алгебраические условия параметрической инвариантности выхода линейной стационарной системы в первом приближении // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2010. № 6. С. 16—22.

Сведения об авторах

Ольга Валерьевна Слита — канд. техн. наук, доцент; Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет информационных технологий, механики и оптики, кафедра систем управления и информатики; E-mail: o-slita@yandex.ru

Анатолий Владимирович Ушаков — д-р техн. наук, профессор; Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет информационных технологий, механики и оптики, кафедра систем управления и информатики; E-mail: ushakov-avg@yandex.ru

Рекомендована кафедрой
систем управления и информатики

Поступила в редакцию
13.12.12 г.