УДК 62-51

В. В. Григорьев, С. В. Быстров, И. М. Першин, А. К. Наумова, А. Н. Гурьянова

ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ*

На основе частотных методов исследования систем с распределенными параметрами сформулирован модифицированный критерий Найквиста экспоненциальной устойчивости линейных систем.

Ключевые слова: *экспоненциальная устойчивость, распределенные параметры, частотные методы.*

Введение. Критерий устойчивости Найквиста [1, 2] относится к частотным критериям устойчивости линейных непрерывных систем с постоянными параметрами, он позволяет для систем с одним входом и выходом и единичной обратной связью по амплитудно-фазочастотным характеристикам (АФЧХ) разомкнутого контура устанавливать свойство асимптотической устойчивости замкнутой системы. Однако свойство асимптотической устойчивости не позволяет судить о скорости сходимости процессов системы к положению равновесия. Экспоненциальная устойчивость позволяет оценивать быстродействие системы по степени сходимости процессов к положению равновесия. Модификация критерия Найквиста дает возможность установить свойство экспоненциальной устойчивости для линейных непрерывных систем с постоянными параметрами и тем самым оценить их быстродействие. Модифицированный критерий Найквиста экспоненциальной устойчивости распространяется на линейные системы с распределенными параметрами.

Модификация критерия Найквиста для линейных непрерывных систем с постоянными параметрами. Рассмотрим линейную непрерывную систему, передаточная функция разомкнутого контура которой $W(s)$ представляет отношение двух полиномов

$$W(s) = \frac{B(s)}{A(s)},$$

* Работа выполнена при финансовой поддержке ФЦП „Научные и научно-педагогические кадры инновационной России“ на 2009—2013 гг. (государственный контракт № 14.740.11.1080).

причем степень полинома $A(s)$ равна n, а $B(s)$ — $m(m \leq n)$. При этом передаточная функция замкнутой системы имеет вид

$$\Phi(s) = \frac{B(s)}{A(s) + B(s)},$$

где $A(s)+B(s)$ — характеристический полином замкнутой системы. Введем вспомогательную передаточную функцию

$$W_1(s) = 1 + W(s) = \frac{A(s) + B(s)}{A(s)} = \frac{D(s)}{D_1(s)},$$

где $D(s) = A(s) + B(s)$ — характеристический полином замкнутой системы, $D_1(s) = A(s)$ — характеристический полином разомкнутого контура. Замкнутая система экспоненциально устойчива, если все корни ее характеристического полинома лежат левее прямой, параллельной мнимой оси, сдвинутой на значение α (α — параметр экспоненциальной устойчивости, определяющий степень сходимости процессов к положению равновесия). Сведем задачу установления факта экспоненциальной устойчивости к классической задаче определения устойчивости, для чего введем конформное отображение вида

$$s_1 = s - \alpha,$$

при этом характеристический полином замкнутой системы $D(s_1) = A(s_1) - B(s_1)$ должен иметь все корни характеристического полинома относительно переменной s_1 в левой полуплоскости комплексной плоскости корней, и все корни должны иметь отрицательные вещественные части. Вспомогательная передаточная функция с учетом конформного отображения примет вид

$$W_1(s_1) = \frac{D(s_1)}{D_1(s_1)}.$$

Перейдем к частотным передаточным функциям:

$$s_1 = j\omega - \alpha = j\omega_1,$$

при этом

$$W_1(j\omega_1) = \frac{D(j\omega_1)}{D_1(j\omega_1)}.$$

Согласно принципу приращения аргумента, если разомкнутый контур имеет l корней, вещественная часть которых больше значения $-\alpha$, а остальные $n - l$ корней имеют вещественные части, меньшие $-\alpha$, то приращение аргумента f_1 вспомогательной частотной передаточной функции должно быть равно

$$f_1 = \frac{n\pi}{2} - \frac{(n-l)\pi}{2} + \frac{l\pi}{2} = l\pi.$$

Перейдя к АФЧХ разомкнутого контура, получим, что приращение аргумента f_2 частотной передаточной функции разомкнутого контура

$$W(j\omega_1) = \frac{B(j\omega_1)}{A(j\omega_1)}$$

относительно точки комплексной плоскости $(-1, j{=}0)$ должно быть равно $f_2 = l\pi$.

Если разомкнутый контур экспоненциально устойчив с параметром α, то $l = 0$ и $f_2 = 0$, т.е. АФЧХ модифицированной частотной передаточной функции разомкнутого контура

$W(j\omega_1)$ не должна охватывать точку (-1, j=0) комплексной плоскости, при этом линейная система будет экспоненциально устойчивой со степенью сходимости α.

Применение частотных методов к системам с распределенными параметрами. Для пространствено-инвариантных распределенных систем [1—5] передаточная функция по каждой пространственной моде может быть представлена в виде:

$$W_{\eta,\gamma,\xi}(s) = B_{\eta,\gamma,\xi}(s)/A_{\eta,\gamma,\xi}(s),\ \eta,\ \gamma=1, 2, \ldots, \xi=1, 2, \ldots, 4, \tag{1}$$

причем степень полиномов $A_{\eta,\gamma,\xi}(s)$ и $B_{\eta,\gamma,\xi}(s)$ равна бесконечности. Пространственно-инвариантную систему структурно можно представить в виде бесконечной совокупности условно сосредоточенных систем (по каждой пространственной моде), при этом доказано [1], что если каждый контур устойчив, то устойчива и вся система.

Согласно работе [2], передаточная функция разомкнутой системы должна удовлетворять условиям, представленным в виде отношения аналитически целых функций:

1) $\lim_{s\to\infty} W_{\eta,\gamma,\xi}(s)=\text{const}$,

2) внутри контура интегрирования передаточная функция должна быть мероморфной.

Для определения возможности применения критерия Найквиста к каждому контуру системы управления необходимо провести анализ передаточной функции каждого из контуров.

Пример 1. Исследуем передаточную функцию процесса распространения тепла в цилиндрическом стержне.

Рассмотрим особенности применения частотного критерия Найквиста при анализе устойчивости в каждом контуре системы управления процессом распространения тепла в цилиндре конечных размеров, управляющее воздействие на который распределено по границе.

Согласно работам [1, 3], передаточная функция объекта по η-й моде входного воздействия может быть представлена в виде отношения функций Бесселя:

$$W_{0,\eta}(s) = \frac{J_{0,\eta}\left(\overset{*}{R}, s\right)}{J_{0,\eta}(R, s)},\ \eta=1,2,\ \ldots,$$

где $\overset{*}{R}$, R — заданные числа, $J_{0,\eta}(R,s)$ — функция Бесселя первого рода нулевого порядка.

Представляя функцию $J_{0,\eta}(R,s)$ в виде $J_{0,\eta}(jz)$, η=1, 2, …, рассмотрим поведение функции на контуре интегрирования бесконечно большого радиуса. Функция $J_{0,\eta}(jz)$ при бесконечно больших значениях аргумента z, согласно [4, 5], может быть представлена в виде следующего соотношения:

$$J_{0,\eta}(jz) = \frac{1}{(2\pi z)^{1/2}} \exp(z)\left(1 + \frac{1}{1!8z} + \frac{1\cdot 3^2}{2!(8z)^2} + \ldots\right),\ |\arg z| \le \frac{\pi}{2},\ \eta = \overline{1,\infty}.$$

Найдем предел

$$\lim_{s\to\infty} W_{0,\eta}(s) = \lim_{s\to\infty}\left[\frac{\left(2\pi z_\eta\right)^{1/2}}{\left(2\pi \overset{*}{z}_\eta\right)^{1/2}} \exp\left(\Delta z_\eta\right) \frac{\left(1 + \dfrac{1}{1!8\overset{*}{z}_\eta} + \dfrac{1\cdot 3^2}{2!\left(8\overset{*}{z}_\eta\right)^2} + \ldots\right)}{\left(1 + \dfrac{1}{1!8 z_\eta} + \dfrac{1\cdot 3^2}{2!\left(8 z_\eta\right)^2} + \ldots\right)}\right],\ \eta = \overline{1,\infty}, \tag{2}$$

значения аргументов функции могут быть найдены из следующих соотношений:

$$\overset{*}{z}_\eta = \left(\frac{s}{a_1} + \psi_\eta^2\right)^{1/2} \overset{*}{R},\ z_\eta = \left(\frac{s}{a_1} + \psi_\eta^2\right)^{1/2} R,\ \Delta z = \left(\overset{*}{R} - R\right)\left(\frac{s}{a_1} + \psi_\eta^2\right)^{1/2},$$

$$\psi_\eta = \pi\frac{\eta}{x_L},\ \eta = \overline{1,\infty},$$

x_L — заданное число. Преобразовав (2), получим

$$\lim_{s\to\infty} W_{0,\eta}(s) =$$

$$= \lim_{s\to\infty}\left[\left(\frac{R}{\overset{*}{R}}\right)^{1/2} \cdot \exp\left(\left(\frac{s}{a_1} + \psi_\eta^2\right)^{1/2}\left(\overset{*}{R} - R\right)\right)\frac{\left(1 + \dfrac{1}{1!8\overset{*}{z}_\eta} + \dfrac{1\cdot 3^2}{2!\left(8\overset{*}{z}_\eta\right)^2} + \ldots\right)}{\left(1 + \dfrac{1}{1!8z_\eta} + \dfrac{1\cdot 3^2}{2!\left(8z_\eta\right)^2} + \ldots\right)}\right],\ \eta = \overline{1,\infty}. \quad (3)$$

Так как условия физической реализуемости предполагают $\overset{*}{R} < R$, то

$$\lim_{s\to\infty} W_{0,\eta}(s) = 0,\ \eta = \overline{1,\infty}.$$

Предположим, что передаточная функция регулятора по η-й моде входного воздействия равна K_η (K_η — заданные числа; η=1, 2, …).

В этом случае характеристический полином разомкнутой системы η-го контура имеет вид:

$$J_{0,\eta}\left(jz_\eta\right) = 0,\ \eta = \overline{1,\infty}.$$

Рассмотрим отображение правой полуплоскости S на плоскость $\Gamma = jz_\eta$. Положим

$$s = M_1\left(\cos\varphi_1 + j\sin\varphi_1\right), \quad (4)$$

где M_1 — модуль комплексного числа s; φ_1 — фаза комплексного числа s.

Подставив (4) в (3), получим

$$jz_\eta = j\left[M_2\left(\cos\varphi_1 + j\sin\varphi_1\right) + \psi_\eta^2\right]^{1/2} R,\ \eta = \overline{1,\infty}, \quad (5)$$

где $M_2 = M_1/a_1$, a_1 — заданное число. Преобразовав (5), придем к следующему результату:

$$jz_\eta = \left[M_2\left(\cos\varphi_1 + j\sin\varphi_1\right) + \psi_\eta^2\right]^{1/2} R,\ \eta = \overline{1,\infty}.$$

Для удобства рассмотрения комплексных чисел jz_η ($\eta = \overline{1,\infty}$) на комплексной плоскости Γ (рис. 1) представим комплексное число jz_η в наглядной форме

$$jz_\eta = A_\eta \exp\left(j\varphi_{2,\eta}\right),\ \eta = \overline{1,\infty},$$

где

$$\varphi_{2,\eta} = \varphi_{3,\eta}/2; \quad (6)$$

$$\varphi_{3,\eta} = \mathrm{arctg}\left[\frac{-M_2\sin\varphi_1}{-M_2\cos\varphi_1 - \psi_\eta^2}\right]; \quad (7)$$

$$A_\eta = R\left[\left(M_2\sin\varphi_1\right)^2 + \left(M_2\cos\varphi_1 - \psi_\eta^2\right)^2\right]^{1/4};\ \eta = \overline{1,\infty}. \quad (8)$$

При $\varphi_1 = \pi/2$ значение $\varphi_{2,\eta}$, согласно (6), (7), определяется из следующего соотношения:

$$\varphi_{2,\eta} = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{-M_2}{-\psi_\eta^2}\right),\ \eta = \overline{1,\infty}.$$

Найдем предел

$$\lim_{M_1\to\infty}\varphi_{2,\eta} = \lim_{M_1\to\infty}\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{-M_1}{-a_1\psi_\eta^2}\right) = -\frac{\pi}{4},\ \ \eta = \overline{1,\infty}.$$

Аналогично можно показать, что при φ_1=–π/2 и $M_1 \to \infty$ значение $\varphi_{2,\eta}$ стремится к π/4.

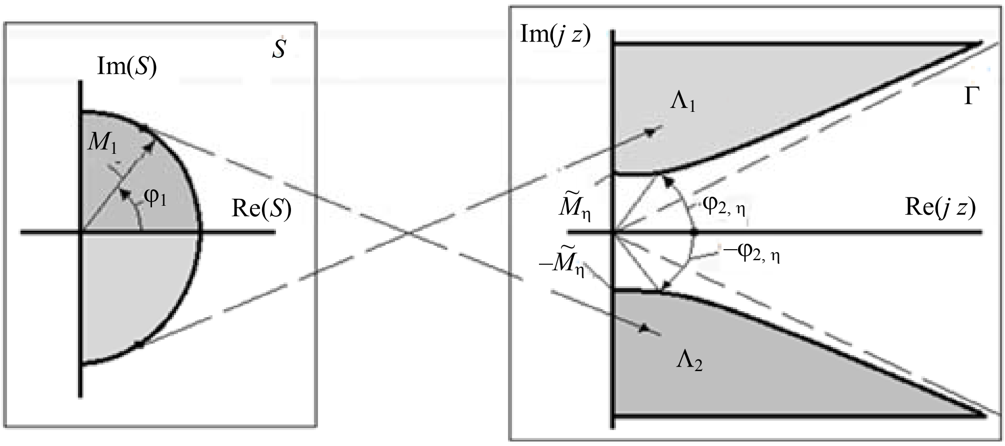

Рис. 1

На рис. 1 показано отображение правой полуплоскости S на плоскость Г. Получаемое отображение представлено в виде секторов Λ_1 и Λ_2; $\tilde{M}_\eta = \psi_\eta R$.

Исследования, проведенные в работе [5], показывают, что функции $J_{0,\eta}\left(jz_\eta\right)$, $\eta = \overline{1,\infty}$, в секторах Λ_1 и Λ_2 не имеют нулей, следовательно, функция $J_{0,\eta}\left(R,s\right)$ не имеет нулей, лежащих в правой полуплоскости S. Это отражает известное свойство устойчивости тепловых процессов. Исследуя функцию $\overset{*}{J}_{0,\eta}(R,s)$, $\eta = \overline{1,\infty}$, можно показать, что она также не имеет нулей, лежащих в правой полуплоскости S. Представленная методика позволяет судить о нулях и полюсах передаточной функции по каждому контуру управления одномерным температурным полем.

Рассмотрим отображение области $\{G, s\}$ в область $\{G, jz(G)\}$. Для этого представим выражение (6) с использованием обобщенной координаты G [1, 3]:

$$jz(G) = A(g)\exp\left(j\varphi_2(G)\right),\ G = \overline{G_\text{н},\infty},$$

где

$$\varphi_2 = \varphi_3/2; \tag{9}$$

$$\varphi_3 = \operatorname{arctg}\left[\frac{-M_2\sin\varphi_1}{-M_2\cos\varphi_1 - G}\right]; \tag{10}$$

$$A(G) = R\left[\left(M_2\sin\varphi_1\right)^2 + \left(M_2\cos\varphi_1 - G\right)^2\right]^{1/4},\ G = \overline{G_\text{н},\infty}. \tag{11}$$

При φ_1=π/2 значение φ_2, согласно (9), (10), определяется из следующего соотношения:

$$\varphi_2 = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{-M_2}{-G}\right),\ G = \overline{G_\text{н},\infty}.$$

Найдем предел

$$\lim_{M_1\to\infty}\varphi_2 = \lim_{M_1\to\infty}\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{-M_1}{-aG}\right) = -\frac{\pi}{4},\ G=\overline{G_{\text{н}},\infty}\,.$$

Аналогично можно показать, что при $\varphi_1 = -\pi/2$ и $M_1\to\infty$ значение φ_2 стремится к $\pi/4$. На рис. 2 представлено отображение области $\{G, s\}$ в область $\{G, jz(G)\}$. Это отображение получается в виде областей Λ_1 и Λ_2; $\tilde{M} = \sqrt{G}R$.

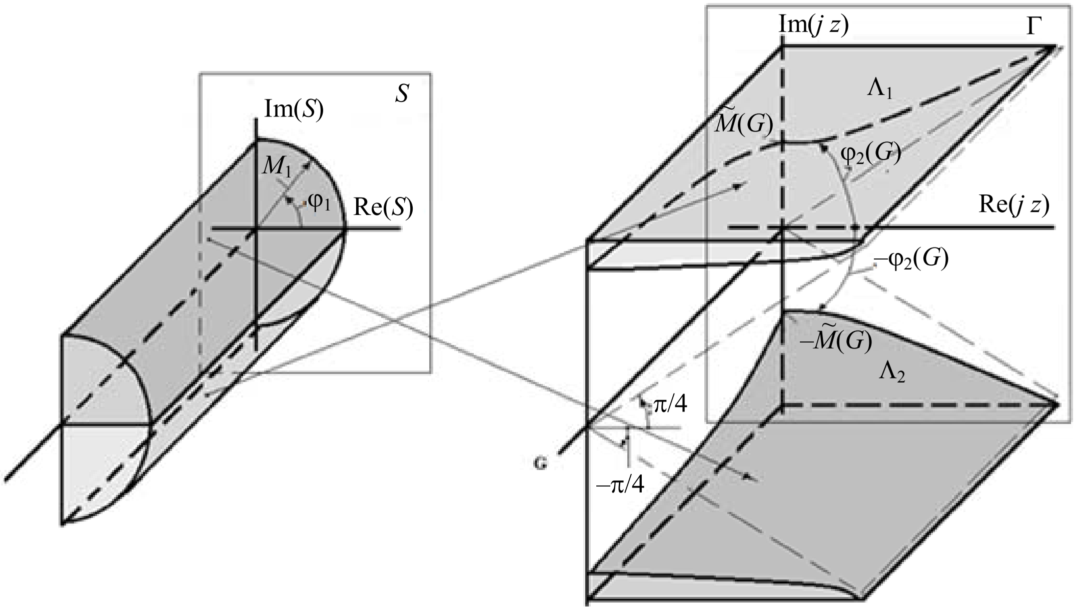

Рис. 2

Исследования, проведенные в работах [1, 3], показывают, что рассматриваемая функция в областях Λ_1 и Λ_2 не имеет нулей, следовательно, функция $J_{0,\eta}\left(jz_\eta\right)$, $\eta=\overline{1,\infty}$, записанная с использованием обобщенной координаты в виде $J_0\left(G,R,s\right)$, не имеет нулей, лежащих в области $\{G, s\}$. Это отражает известное свойство устойчивости тепловых процессов. Аналогично можно показать, что функция $J_0(G,\overset{*}{R},s)$, $G=\overline{G_{\text{н}},\infty}$, также не имеет нулей, лежащих в правой полуплоскости *S*.

Полученные результаты для передаточной функции, записанной с использованием обобщенной координаты, показывают, что передаточная функция не имеет нулей и полюсов, лежащих в правой полуплоскости *S*, является мероморфной и на контуре интегрирования бесконечно большого радиуса не имеет особенностей. Следовательно, критерий Найквиста применим к оценке устойчивости рассматриваемых систем управления.

Введя конформное отображение вида

$$s_1 = s - \alpha\,,$$

проведем аналогичную процедуру с передаточной функцией вида

$$W_{\eta,\gamma,\xi}(s_1) = B_{\eta,\gamma,\xi}(s_1)/A_{\eta,\gamma,\xi}(s_1);\ \eta,\gamma = 1, 2, \ldots;\ \xi = 1, 2, \ldots, 4.$$

Если разомкнутый контур экспоненциально устойчив с параметром α, то АФЧХ модифицированной частотной передаточной функции разомкнутого контура $W_{\eta,\gamma,\xi}(s_1)$ не должна охватывать точку $(-1, j=0)$ комплексной плоскости, при этом линейная система будет экспоненциально устойчивой со степенью сходимости α.

Разомкнутый контур будет экспоненциально устойчив с параметром α, если пространственный годограф модифицированной частотной передаточной функции разомкнутого контура $W(G,s_1)$ не будет охватывать линию $(-1, j{=}0,G)$. При этом на системы с распределенными параметрами можно распространить оценки качества процессов [6].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Григорьев В. В., Быстров С. В., Першин И. М.* Синтез распределенных регуляторов: Учеб. пособие. СПб: Изд-во СПбГУ ИТМО, 2011. 200 с.
2. *Воронов А. А.* Основы теории автоматического управления. Особые линейные и нелинейные системы. М.: Энергия, 1981. 303 с.
3. *Першин И. М.* Анализ и синтез систем с распределенными параметрами. Пятигорск: Изд-во „РИО КМВ“, 2007. 243 с.
4. *Лыков А. В.* Теория теплопроводности. М.: Высш. школа, 1967. 599 с.
5. *Янке П., Эмде Ф., Леш Ф.* Специальные функции. М.: Наука, 1968. 344 с.
6. *Быстров С. В., Григорьв В. В., Рабыш Е. Ю., Мансурова О. К.* Анализ качества переходных процессов в непрерывных и дискретных системах на основе условий качественной экспоненциальной устойчивости // Мехатроника, Автоматизация, Управление. 2012. № 9. С. 32—36.

Сведения об авторах

Валерий Владимирович Григорьев — д-р техн. наук, профессор; Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет информационных технологий, механики и оптики, кафедра систем управления и информатики; E-mail: grigvv@yandex.ru

Сергей Владимирович Быстров — канд. техн. наук, доцент; Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет информационных технологий, механики и оптики, кафедра систем управления и информатики; E-mail: sbystrov@mail.ru

Иван Митрофанович Першин — д-р техн. наук, профессор; Пятигорский институт Северо-Кавказского федерального университета, кафедра управления в технических и биомедицинских системах; заведующий кафедрой; E-mail: ivmp@yandex.ru

Алла Константиновна Наумова — Санкт-Петербургский государственный политехнический университет; заведующая сектором учебного отдела департамента образовательной деятельности; E-mail: alya_naumova@mail.ru

Алёна Николаевна Гурьянова — магистрант; Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет информационных технологий, механики и оптики, кафедра систем управления и информатики; E-mail: lilyliya@mail.ru

Рекомендована кафедрой
систем управления и информатики

Поступила в редакцию
13.12.12 г.