УДК 62.50

Д. С. Бирюков, Н. А. Дударенко, А. В. Ушаков

КОНТРОЛЬ ВЫРОЖДЕНИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ И СИСТЕМ: ГРАМИАННЫЙ ПОДХОД*

Рассматривается задача контроля вырождения динамических объектов и систем. Для решения задачи используется грамианный подход, основанный на вычислении сингулярных чисел грамианов управляемости отношений системы вход—выход с последующим применением аппарата функционалов вырождения.

Ключевые слова: *динамическая система, функционал вырождения, критериальная матрица, грамиан управляемости.*

Введение. В ходе исследований в области разработки технологии контроля вырождения динамических объектов и систем [1] авторы настоящей статьи поставили задачу, не прибегая к моделированию потока возможных входных заявок, сформировать априорную экспресс-оценку потенциальной возможности вырождения системы. Решение этой проблемы было найдено в результате объединения аппарата функционалов вырождения и технологии системных грамианов [2, 3]. В настоящей статье рассматривается задача контроля вырождения динамических объектов и систем на основе грамианов управляемости.

Технология конструирования функционалов вырождения. Сведем некоторую многоканальную динамическую систему посредством математических преобразований к линейной алгебраической задаче (ЛАЗ) вида

$$\eta(w) = N(w,\theta)\chi(w), \tag{1}$$

где $N(w,\theta)$ — ($m \times m$)-матрица для любых w, θ; $\eta(w)$, $\chi(w)$ — p-мерные векторы; θ — p-мерный параметр, изменяющий алгебраические свойства матрицы N. Аппарат функционалов вырождения $J_{D\nu}$ формируется на спектре $\sigma_\alpha\{N\}$ сингулярных чисел $\alpha_j\left(j=\overline{1,m}\right)$ критериальной матрицы N с использованием ЛАЗ (1):

$$\sigma_\alpha\{N\} = \left\{\alpha_j = \left|\mu_j^{1/2}\right|;\ j=\overline{1,m}\right\} \tag{2}$$

(μ_i — корни уравнения $\det\left(\mu I - N^T N\right) = 0$), вычисляемых в силу соотношений

$$J_{D\nu}\{N\} = \alpha_\nu\{N\}/\alpha_1\{N\};\ \nu=\overline{m,1}. \tag{3}$$

Свойства функционалов вырождения приведены в работе [1].

Если воспользоваться сингулярным разложением матрицы (SVD-процедурой) [4], то матрица N запишется следующим образом:

$$N = U_N \Sigma_N V_N^T, \tag{4}$$

$$NV_{Nj} = \alpha_j U_{Nj},\ j=\overline{1,m}.$$

Это векторно-матричное соотношение придает исходной линейной алгебраической задаче (1) геометрический смысл: вектор $\chi = V_{Nj}$ $(j=\overline{1,m})$ отражается в подпространство, натянутое на j-й элемент U_{Nj} левого сингулярного базиса U_N так, что соответствующий ему

* Исследование выполнено при поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации (соглашение № 14.B37.21.1928).

вектор имеет норму, равную α_j. Тогда задача вырождения формализуется как задача контроля перехода критериальной матрицы N из сферы, расположенной в пространстве, натянутом на векторы χ, в эллипсоид, натянутый на левый сингулярный базис U_N с полуосями, по размеру совпадающими с сингулярными числами матрицы N.

Вырождение матрицы N в смысле достижения ею значения единицы функционала вырождения J_D, записанного в форме (3), означает „сплющивание" этого эллипсоида вдоль p-й полуоси, т.е. вдоль p-го левого сингулярного вектора U_{Np}. Нетрудно видеть, что если параметр θ модифицирует матрицу $N(\theta)$ таким образом, что последовательно, начиная с α_p, принимают нулевые значения остальные $p-1$ сингулярных чисел, кроме α_1, то в пространстве, натянутом на левый сингулярный базис, будет наблюдаться последовательное „сплющивание" эллипсоида вдоль векторов U_{Np}, $U_{Np-1},\ldots U_{N2}$. В итоге сфера отобразится в отрезок прямой. Таким образом, функционалы вырождения $J_{D\nu}$ используются для количественной оценки вырождения динамических систем и объектов.

Интегральная экспресс-оценка вырождения динамической системы на спектре сингулярных чисел грамианов управляемости вход—выход. Пусть задана многоканальная непрерывная динамическая система вида

$$\dot{x}(t) = Fx(t) + Gg(t)\,,\ x(0)\,;\ y(t) = Cx(t)\,, \tag{5}$$

где x, g, y — векторы состояния, задающего воздействия и выхода соответственно; $x \in R^n$, $g, y \in R^n$; F, G, C — матрицы состояния системы, входа и выхода непрерывного объекта управления соответственно, согласованные по размерности с размерностью векторов x, g, и y так, что $F \in R^{n\times n}$, $G, C^T \in R^{n\times m}$.

При использовании грамианной технологии для непрерывной многоканальной системы вида (5) задается грамиан управляемости по состоянию с помощью интегральных соотношений

$$W_x(t) = \int_0^t x(\tau, g)x^T(\tau, g)dt\,|_{g=\delta(t)} = \int_0^t e^{F\tau}GG^T e^{F^T\tau}d\tau\,. \tag{6}$$

Дифференциальный аналог соотношения (6) принимает вид

$$\dot{W}_x(t) = FW_x(t) + W_x(t)F^T + GG^T\,,\ W_x(0) = 0\,. \tag{7}$$

Из (6), (7) видно, что если матрица F системы (5) является гурвицевой, то грамиан управляемости имеет установившееся значение W_x, удовлетворяющее предельному переходу

$$\lim_{t\to\infty} W_x(t) = W_x\,, \tag{8}$$

при этом скорость его изменения как функция времени удовлетворяет соотношению

$$\lim_{t\to\infty} \dot{W}_x(t) = 0\,. \tag{9}$$

Если условия (9) и (8) подставить в (7), то для вычисления матрицы W_x можно воспользоваться алгебраическим матричным уравнением типа уравнения Ляпунова

$$FW_x(t) + W_x(t)F^T = -GG^T\,. \tag{10}$$

Грамиан управляемости отношения „вход—выход" W_y по выходу может быть вычислен с помощью матричного выражения

$$W_y = CW_xC^T\,. \tag{11}$$

Для случая многоканальных дискретных систем грамианы отношений „вход—состояние“ и „вход—выход“ строятся следующим образом. Пусть задана многомерная дискретная динамическая система вида

$$x(k+1)=\bar{F}x(k)+\bar{G}g(k),\ x(0);\ y(k)=\bar{C}x(k), \tag{12}$$

где $x\in R^n$; $g,y\in R^m$; $\bar{F}$, $\bar{G}$, $\bar{C}$ — матрицы состояния системы, входа и выхода дискретного объекта управления, согласованные по размерности с размерностью векторов x, g, и y так, что $\bar{F}\in R^{n\times n}$; $\bar{G},\bar{C}^T\in R^{n\times m}$; k — дискретное время, выраженное в числе интервалов дискретности длительностью Δt ($t=k(\Delta t)$). Представим дискретную систему (12) в виде:

$$\left.\begin{aligned}
&x(1)=\bar{F}x(0)+\bar{G}g(0),\\
&x(2)=\bar{F}x(1)+\bar{G}g(1)=\bar{F}^2x(0)+\bar{F}\bar{G}g(0)+\bar{G}g(1),\\
&\vdots\\
&x(k)=\bar{F}^kx(0)+\bar{F}^{k-1}\bar{G}g(0)+\bar{F}^{k-2}\bar{G}g(1)+\ldots+\bar{G}g(k-1)|_{x(0)=0}=\\
&\quad=\begin{bmatrix}\bar{G} & \bar{F}\bar{G} & \ldots & \bar{F}^{k-2}\bar{G} & \bar{F}^{k-1}\bar{G}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}g(k-1) & g(k-2) & \ldots & g(0)\end{bmatrix}^T.
\end{aligned}\right\} \tag{13}$$

Здесь для вектора состояния $x(k)$ введена матрица управляемости системы по состоянию на k первых интервалах дискретности

$$Q_x(k)=\begin{bmatrix}\bar{G} & \bar{F}\bar{G} & \ldots & \bar{F}^{k-2}\bar{G} & \bar{F}^{k-1}\bar{G}\end{bmatrix}. \tag{14}$$

На этой матрице может быть сконструирован грамиан управляемости по состоянию $\bar{W}_x(k)$ на первых k интервалах дискретности в форме

$$\bar{W}_x(k)=Q_x(k)Q_k^T(k). \tag{15}$$

Очевидно, что для момента $(k+1)$ грамиан управляемости отношения „вход—состояние“ дискретной системы (12) $\bar{W}_x(k+1)$ в силу определения (15) запишется как

$$\bar{W}_x(k+1)=Q_x(k+1)Q_k^T(k+1), \tag{16}$$

где

$$Q_x(k+1)=\begin{bmatrix}\bar{G} & \bar{F}\bar{G} & \ldots & \bar{F}^{k-1}\bar{G} & \bar{F}^k\bar{G}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\bar{G} & \bar{F}Q_x(k)\end{bmatrix}. \tag{17}$$

Подстановка (17) в (16) с использованием представления (15) дает

$$\bar{W}_x(k+1)=Q_x(k+1)Q_k^T(k+1)=\begin{bmatrix}\bar{G} & \bar{F}Q_x(k)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\bar{G}^T\\ Q_x^T(k)\bar{F}^T\end{bmatrix}=\bar{G}\bar{G}^T+\bar{F}\bar{W}_x(k)\bar{F}^T. \tag{18}$$

Установившееся значение грамиана управляемости по состоянию зададим в форме предельных соотношений

$$\bar{W}_x=\lim_{k\to\infty}\bar{W}_x(k);\ \bar{W}_x=\lim_{(k+1)\to\infty}\bar{W}_x(k+1). \tag{19}$$

Подстановка соотношений (19) в выражение (18) позволяет получить уравнение вида матричного дискретного уравнения Ляпунова

$$\bar{W}_x=\bar{F}\bar{W}_x\bar{F}^T+\bar{G}\bar{G}^T. \tag{20}$$

Формирование системного грамиана управляемости по выходу отношений „вход—выход“ может быть осуществлено с помощью матричного уравнения

$$\bar{W}_y=\bar{C}\bar{W}_x\bar{C}^T. \tag{21}$$

Если теперь к сконструированным грамианам отношения „вход—выход“ (11) и (21) соответственно многоканальной непрерывной системы (5) и многоканальной дискретной системы (12) применить процедуру сингулярного разложения матриц, с тем чтобы вычислить алгебраические спектры сингулярных чисел указанных грамианов с последующим вычислением на их спектре функционалов вырождения, то можно сформировать априорную экспресс-оценку возможного вырождения многоканальной динамической системы.

Алгоритм контроля вырождения динамических объектов и систем на основе грамианов управляемости

1. Сформировать векторно-матричное описание многоканальной динамической системы и зафиксировать ее параметры.

2. Составить уравнение типа уравнения Ляпунова для случая непрерывного векторно-матричного представления многоканальной системы в форме (10) и для случая многоканальной дискретной динамической системы в форме (20), решить его относительно грамиана управляемости по состоянию.

3. Вычислить грамиан управляемости по выходу многоканальной системы в силу соотношения (11) для случая ее непрерывного модельного представления и в форме (21) для дискретного векторно-матричного представления многоканальной динамической системы.

4. Построить сингулярное разложение грамиана управляемости по выходу.

5. Построить функционалы вырождения в форме (3).

6. Полученные результаты передать системному аналитику на предмет интерпретации и принятия системных решений.

Заключение. Аппарат функционалов вырождения совместно с методом системных грамианов позволяет сформировать априорную оценку склонности многоканальной динамической системы и объекта к вырождению без необходимости моделирования потока возможных входных заявок. Следует ожидать, что эти оценки в силу структуры соотношений (10), (11) и (20), (21) будут совпадать с оценками функционалов вырождения, полученных при моделировании потока входных заявок стационарным в широком смысле стохастическим экзогенным воздействием типа „белый шум“.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Дударенко Н., Ушаков А.* Анализ многомерных динамических систем: технология контроля вырождения. Saarbrucken: LAP LAMBERT Academic Publishing, 2011. 232 с.

2. *Мироновский Л. А.* Функциональное диагностирование динамических систем. М.—СПб: Изд-во МГУ-ГРИФ, 1998.

3. *Moore B.C.* Principal Component Analysis in Linear Systems: Controlability, Observability and Model Reduction // IEEE Trans. on Automatic Control. 1981. Vol. AC-26, N 1. P. 17—31.

4. *Голуб Дж., Ван Лоун Ч.* Матричные вычисления. М.: Мир, 1999. 548 с.

Сведения об авторах

Дмитрий Сергеевич Бирюков — аспирант; Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет информационных технологий, механики и оптики, кафедра систем управления и информатики; E-mail: quaint03@mail.ru

Наталия Александровна Дударенко — канд. техн. наук, доцент; Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет информационных технологий, механики и оптики, кафедра систем управления и информатики; доцент; E-mail: dudarenko@yandex.ru

Анатолий Владимирович Ушаков — д-р техн. наук, профессор; Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет информационных технологий, механики и оптики, кафедра систем управления и информатики; E-mail: ushakov-avg@yandex.ru

Рекомендована кафедрой
систем управления и информатики

Поступила в редакцию
13.12.12 г.