УДК 534.1

Ж. Т. Жусубалиев, А. И. Андриянов, А. А. Михалев, В. В. Шеин

КВАЗИПЕРИОДИЧЕСКАЯ ДИНАМИКА СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ С ШИРОТНО-ИМПУЛЬСНОЙ МОДУЛЯЦИЕЙ

Исследована динамика системы управления с синусоидальной широтно-импульсной модуляцией. Проведен бифуркационный анализ двумерной модели однофазного инвертора напряжения. Показано, что в такой системе наряду с классической бифуркацией Неймарка—Саккера существует С-бифуркация, приводящая к рождению инвариантного тора из периодической орбиты.

Ключевые слова: *инвертор напряжения, инвариантный тор, С-бифуркация, кусочно-гладкие динамические системы.*

Введение. Импульсные системы автоматического управления обычно описываются дифференциальными (кусочно-гладкими динамическими) уравнениями с разрывными правыми частями. Фазовые траектории рассматриваемых динамических систем „сшиваются“ из отдельных гладких участков [1]. Усложнение колебаний в кусочно-гладких системах связано с двумя типами бифуркаций. Первый тип — как и в гладких системах, это локальные бифуркации, например, „седло—узел“, удвоения периода, Неймарка—Сакера, и глобальные — гомоклинические и гетероклинические.

Бифуркации второго типа возникают, когда траектория периодического движения проходит через границу одной из поверхностей сшивания или касается ее. При этом нарушаются условия существования периодического решения и появляются или исчезают участки траектории в одной из областей кусочной непрерывности [1, 2]. Такие бифуркации получили название С-бифуркаций [1—3] (border-collision bifurcations [4]).

Простейшему бифуркационному процессу при С-бифуркациях соответствует непрерывный переход решения одного типа в решение другого типа [1]. Возможны и более сложные ситуации, например, удвоение, „умножение“ периода колебаний, рождение движений с участками скольжения или хаотического аттрактора из периодической орбиты [2, 5—8].

Наряду с каскадом бифуркаций удвоения периода и различными формами перемежаемости переход к хаосу через возникновение и разрушение инвариантного тора является одним из классических сценариев в диссипативных системах. Однако в рассматриваемых системах сценарий может отличаться от классического [9—14].

В работах [9—12] было выявлено, что в импульсных системах инвариантный тор может рождаться из периодической орбиты через С-бифуркацию. В такой бифуркации комплексно-сопряженная пара мультипликаторов устойчивого цикла скачком выходит из единичного круга. Потеря устойчивости приводит к появлению эргодического или резонансного тора. В первом случае бифуркация является аналогом классической суперкритической бифуркации Неймарка—Саккера. Во втором случае из периодической орбиты плавно возникает пара циклов (устойчивый и седловой), лежащих на инвариантном торе. Впоследствии этот феномен был обнаружен при анализе кусочно-линейного отображения [10], а также подтвержден экспериментально на примере систем с многозонной импульсной модуляцией [10, 11]. Оказалось, что подобная бифуркация характерна для широкого класса импульсных систем с квазипериодическими свойствами.

Настоящая статья имеет целью обобщить результаты исследований, представленных в работах [9—12], на класс импульсных систем с синусоидальной широтно-импульсной модуляцией. В качестве базового объекта для бифуркационного анализа рассматривается однофазный инвертор напряжения с широтно-импульсным регулированием.

Постановка задачи. Функциональная схема инвертора напряжения приведена на рис. 1, *а*, где E_0 — входное напряжение, $V_{\text{ref}}(t)$ — синусоидальный управляющий сигнал с периодом T, кратным периоду a модуляции ($T = ma$); DD, $DA1$, S/H — инвертор, компаратор, устройство выборки-хранения; $DA2$ — усилитель сигнала ошибки; S_1, S_2, S_3, S_4 — полупроводниковые ключи; VS — датчик напряжения; R — сопротивление, характеризующее потери в катушке индуктивности фильтра; L, C — индуктивность и емкость фильтра; R_L — сопротивление нагрузки; ξ — сигнал ошибки; υ_{con} — выходное напряжение устройства выборки-хранения; υ_{out} — выходное напряжение преобразователя.

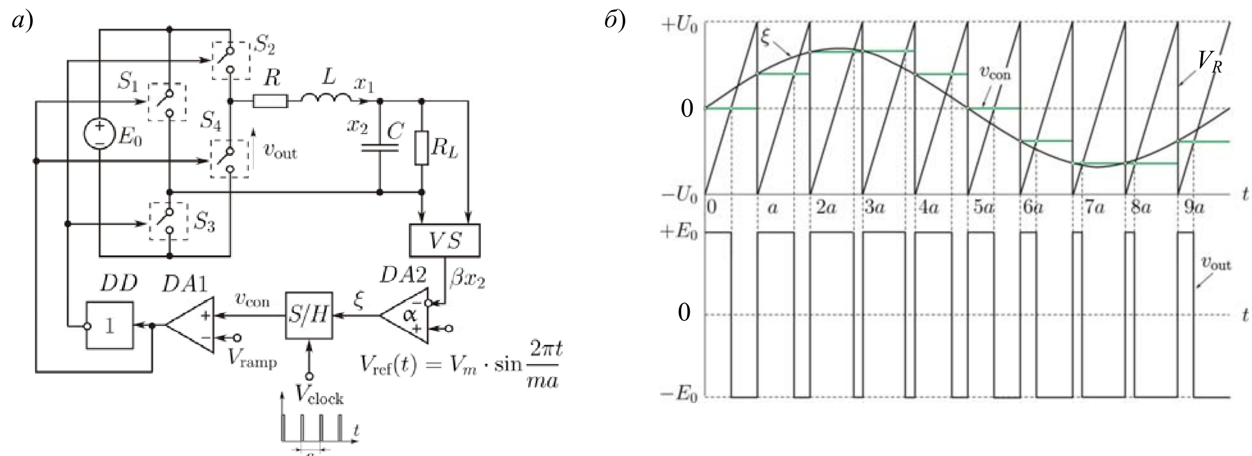

Рис. 1

Временные диаграммы, поясняющие формирование управляющих импульсов, изображены на рис. 1, *б*, здесь $\pm U_0$ — опорное напряжение модулятора; V_R — напряжение на сопротивлении. Управление осуществляется методом широтно-импульсной модуляции первого рода.

Представим математическую модель в безразмерной форме для инвертора:

$$\dot{x} = \mu x - \omega y - (\mu - \omega) K_F; \quad \dot{y} = \omega x + \mu y - (\mu + \omega) K_F; \quad K_F = \mathrm{sign}(\psi - \eta); \tag{1}$$

$$\psi = \frac{q}{\Omega} \sin\left(\frac{2\pi\tau}{m}\right) + \vartheta x(\tau) - y(\tau);$$

$$\eta = \frac{2P}{\alpha\Omega}[t - \tau - 1/2]; \quad \eta(t+1) \equiv \eta(t),$$

где

$$\vartheta = \frac{\mu + \omega}{\mu - \omega}; \quad P = \frac{U_0}{\beta E_*}(1 - \vartheta)(1 + R/R_L);$$

$$q = \frac{V_m}{U_0} P; \quad \Omega = E_0 / E_*,$$

$$\mu = -\frac{a}{2}\left(\frac{R}{L} + \frac{1}{CR_L}\right),$$

$$\omega = a\sqrt{\frac{1}{LC}\left(1 + \frac{R}{R_L}\right) - \frac{1}{4}\left(\frac{R}{L} + \frac{1}{CR_L}\right)^2} > 0.$$

Безразмерные переменные x и y связаны с исходными динамическими переменными x_1 и x_2:

$$x_1 = -(R/L + \mu/a)\gamma_1 - \omega\gamma_2 / a; \quad x_2 = \gamma_1 / C;$$

$$\gamma_1 = -\frac{a^2 E_0}{2\omega L(\mu^2 + \omega^2)}\left[(\mu + \omega)x - (\mu - \omega)y\right];$$

$$\gamma_2 = -\frac{a^2 E_0}{2\omega L(\mu^2 + \omega^2)}\left[(\mu - \omega)x + (\mu + \omega)y\right],$$

где x_1 — ток в катушке индуктивности выходного LC-фильтра; x_2 — напряжение нагрузки.

В приведенных выражениях $x, y \in \mathbb{R}$; K_F — сигнал на выходе модулятора; t — безразмерное время; $\eta(t)$ — вынуждающее воздействие, представляющее собой периодическую последовательность импульсов пилообразной формы с периодом 1: $\eta(t+1) \equiv \eta(t)$; $\tau = [t] = k - 1$ ($k = 1, 2, \ldots$) — дискретное время, $[\bullet]$ — функция, выделяющая целую часть аргумента; q — нормированная амплитуда управляющего синусоидального сигнала с периодом m; μ, ω — действительная и мнимая части собственных значений $\lambda_{1,2} = \mu \pm j\omega, \mu < 0$ матрицы коэффициентов уравнения (1); $\vartheta = (\mu + \omega)/(\mu - \omega)$. Параметр P определяет амплитуду импульсов пилообразной формы $\eta(t)$, Ω — нормированное входное напряжение, α — коэффициент усиления.

Параметры динамической системы (1): $R = 1$ Ом, $L = 4 \cdot 10^{-3}$ Гн, $C = 3{,}5 \cdot 10^{-6}$ Ф, $R_L = 45$ Ом, $V_m = 4$ В, $U_0 = 10$ В, $\alpha > 0$ и $E_0 > 20$, $\Omega = E_0 / E_*$ — нормированное выходное напряжение, где $E_* = 1$ В.

Систему уравнений (1) можно свести к двумерному кусочно-гладкому стробоскопическому отображению:

$$x_{k+1} = e^{\mu}(x_k \cos\omega - y_k \sin\omega) + 2e^{\mu(1-z_k)}(\cos\theta_k - \sin\theta_k) - 1; \qquad (2)$$
$$y_{k+1} = e^{\mu}(x_k \sin\omega + y_k \cos\omega) + 2e^{\mu(1-z_k)}(\sin\theta_k + \cos\theta_k) - 1,$$
$$k = 0, 1, 2, \ldots,$$

где $\theta_k = \omega(1 - z_k)$ и

$$z_k = \begin{cases} 0, & \varphi_k < -\dfrac{P}{\alpha\Omega}; \\ \dfrac{\alpha\Omega}{2P}\varphi_k + \dfrac{1}{2}, & |\varphi_k| \le \dfrac{P}{\alpha\Omega}; \\ 1, & \varphi_k > \dfrac{P}{\alpha\Omega}, \end{cases}$$

$$\varphi_k = \frac{q}{\Omega}\sin\frac{2\pi k}{m} + \vartheta x_k - y_k.$$

Здесь $z_k = t_k - k + 1$ — коэффициент заполнения импульсов, t_k — момент переключения модулятора.

Период T движения динамической системы (1) в общем случае является кратным периоду внешнего воздействия m: $T = mN, N = 1, 2, \ldots$ Такое движение будем называть N-циклом или циклом периода N.

Бифуркационный анализ. На рис. 2 приведена карта динамических режимов в плоскости управляющих параметров (α, Ω) для $m = 10$, где $\Pi_{1,1}$, $\Pi_{1,2}$ — области устойчивости *1*-цикла. На рис. 2 через $\Pi_{4,1}$, $\Pi_{4,2}$ обозначены резонансные „языки“ относительно большой площади, а через Π_{∞} — области квазипериодической и хаотической динамики. Область $\Pi_{1,1}$ ограничена кривой бифуркации Неймарка—Саккера N_{φ} и C-бифуркационной кривой N_{φ}^{C} рождения инвариантного тора из периодической орбиты. Граница N_{φ}^{C} опирается на линию N_{φ} бифуркации Неймарка—Саккера N_{φ} в точке коразмерности два.

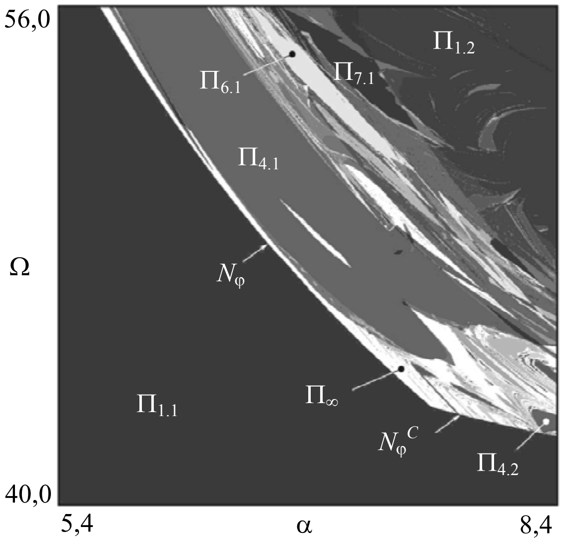

Рис. 2

На рис. 3, *а* приведена бифуркационная диаграмма, иллюстрирующая рождение инвариантного тора через классическую бифуркацию Неймарка—Саккера при $m = 200$. Зависимость абсолютного значения ρ комплексно-сопряженной пары мультипликаторов $\rho_{1,2} = \rho_r \pm j\rho_j$

1-цикла от параметра α приведена на рис. 3, *б*, α_φ — бифуркационное значение параметра, соответствующее рождению инвариантного тора.

Характер движения на торе определяется числом вращения. Когда оно иррационально, инвариантный тор плотно заполняется траекториями (сечение Пуанкаре представляет собой гладкую замкнутую кривую) и динамика квазипериодична. При рациональном числе вращения на инвариантном торе имеется четное число периодических орбит, одна часть которых устойчивые, а другая — седловые, тор образован замыканием неустойчивых многообразий седловых циклов.

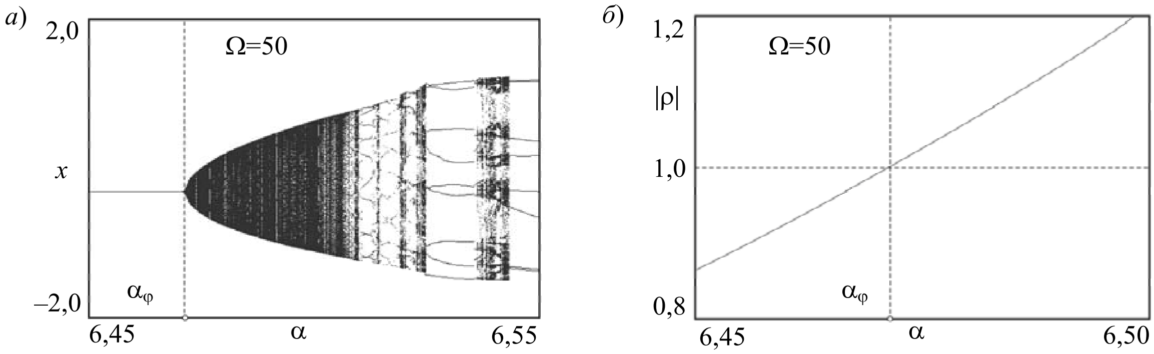

Рис. 3

Остается рассмотреть С-бифуркацию рождения тора из периодической орбиты. Заметим, что бифуркационный анализ, как и в предыдущем случае, выполнен для $m = 200$, тогда как карта режимов рассчитана при $m = 10$. Численные эксперименты показали, что характер бифуркационного поведения системы мало изменяется с увеличением m.

На рис. 4 приведены бифуркационная диаграмма и зависимость абсолютного значения комплексно-сопряженной пары мультипликаторов *1*-цикла от параметра Ω при $\alpha = 8{,}785$. При увеличении значения Ω комплексно-сопряженная пара мультипликаторов *1*-цикла скачком выходит из единичного круга (рис. 4, *а*). Потеря устойчивости *1*-цикла сопровождается плавным возникновением квазипериодических колебаний (рис. 4, *б*).

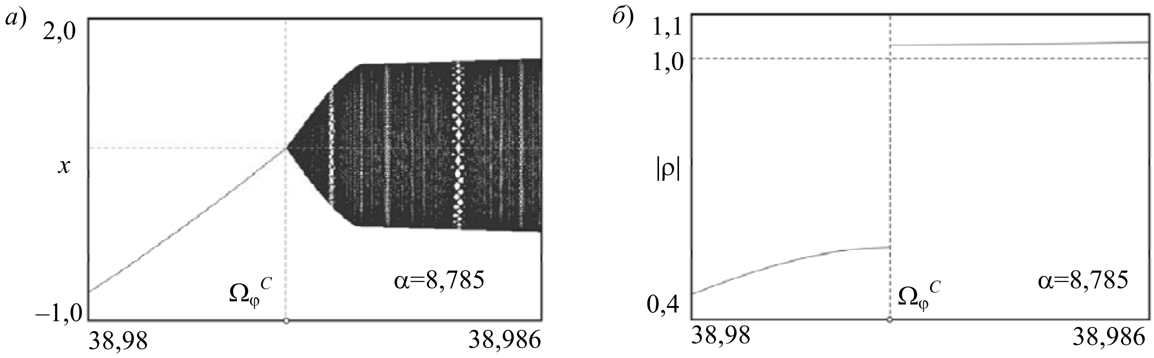

Рис. 4

Как можно видеть из рис. 4, *а*, характерный размер инвариантного тора („диаметр“) при удалении от точки бифуркации $\Omega = \Omega_\varphi^C$ изменяется почти линейно от нуля, в отличие от параболической зависимости, присущей для классической бифуркации Неймарка—Саккера.

Возникновение квазипериодических (или резонансных) колебаний приводит к ухудшению спектрального состава тока и напряжения нагрузки по сравнению с *1*-циклом. Это существенно влияет на качество выходного напряжения, которое должно быть синусоидальным с минимальной долей паразитных гармоник.

Для количественной оценки содержания паразитных гармонических составляющих в выходном переменном напряжении используется коэффициент гармоник:

$$K_{\text{г}} = \frac{\sqrt{V_{\text{вых}}{}^2 - V_{\text{пг}}{}^2}}{V_{\text{пг}}} \cdot 100\,\%,$$

где $V_{\text{вых}}$ — действующее значение выходного напряжения; $V_{\text{пг}}$ — действующее значение полезной гармоники выходного напряжения.

Численные расчеты показали, что для *1*-цикла при $m = 200$, $E_0 = 50$ В, $\alpha = 6$, $K_{\text{г}} \approx 2{,}83$ %, а коэффициент гармоник для квазипериодического режима ($m = 200$, $E_0 = 50$ В, $\alpha = 6{,}5$) составляет примерно $K_{\text{г}} \approx 17$ % (см. рис. 3).

Заключение. В данной статье представлены результаты исследований квазипериодической динамики системы управления с синусоидальной широтно-импульсной модуляцией. Выполнен бифуркационный анализ однофазного инвертора напряжения.

Показано, что в такой системе наряду с классической бифуркацией Неймарка—Саккера существует сценарий рождения инвариантного тора, связанный с С-бифуркацией. В такой бифуркации комплексно-сопряженная пара мультипликаторов устойчивой периодической орбиты скачком выходит из единичного круга: устойчивый цикл переходит в неустойчивый того же периода, но другого типа. Потеря устойчивости сопровождается появлением резонансного или эргодического тора.

Работа выполнена при финансовой поддержке ФЦП „Научные и научно-педагогические кадры инновационной России“ на 2009—2013 гг. (Программное мероприятие № 1.3.1, соглашение 14.B37.21.1146).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Фейгин М. И.* Вынужденные колебания систем с разрывными нелинейностями. М.: Наука, 1994.
2. *Фейгин М. И.* Удвоение периода колебаний при С-бифуркациях в кусочно-непрерывных системах // ПММ. 1970. Т. 34, вып. 5. С. 861—869.
3. *Di Bernando M., Feigin M. I., Hogan S. J., Homer M. E.* Local analysis of C-bifurcations in n-dimensional piecewise-smooth dynamical systems // Chaos, Solitions and Fractals. 1999. Vol. 10, N 11. P. 1881—1908.
4. *Nusse E. H., Yorke J. A.* Border-collision bifurcations including “period two to period three” for piecewise smooth systems // Physica D. 1992. N 57. P. 39.
5. *Zhusubaliyev Zh.T., Mosekilde E.* Bifurcations and Chaos in Peiecewise-Smooth Dynamical Systems. Singapore: World Scientific, 2003.
6. *Leine R. I., Nijmeijer H.* Dynamics and Bifurcations of Non-Smooth Mechanical Systems. Berlin: World Scientific, 2003.
7. *Di Bernando M., Budd C., Champneys A. R., Kowalczyk P., Nordmark A. B., Olivar G., Piroinen P. T.* Bifurcations in nonsmooth dynamical systems // SIAM Review. 2008. Vol. 50, N 4. P. 629—701.
8. *Colombo A., Di Bernardo M., Hogan S. J., Jeffrey M. R.* Bifurcations of piecewise-smooth flows: Perspectives, methodologies and open problems // Physica D: Nonlinear Phenomena. 2012. Vol. 241. P. 1845—1860.
9. *Zhusubaliyev Zh. T., Mosekilde E.* Torus birth bifurcation in DC/DC converter // IEEE Trans. Circ. Syst. I. 2006. Vol. 53. P. 1839—1850.
10. *Zhusubaliyev Zh. T., Mosekilde E., Maity S. M., Mohanan S., Banerkee S.* Border collision route to quasiperiodicity: Numerical investigation and experimental confirmation // Chaos. 2006. Vol. 16. P. 023122.
11. *Zhusubaliyev Zh. T., Yanochkina O. O., Mosekilde E., Banerjee S.* Two-mode dynamics in pulse-modulated control systems // Annual Reviews in Control. 2010. Vol. 34. P. 62—70.
12. *Zhusubaliyev Zh. T., Mosekilde E., Yanochkina O. O.* Torus-bifurcation mechanisms in a DC/DC converter with pulsewidth-modulated control // IEEE Trans. on Power Electronics. 2011. Vol. 26. P. 1270—1279.

13. *Giaouris D., Banerjee S., Imrayed O., Mandal K., Zahawi B., Pickert V.* Border Complex interaction between tori and onset of three-frequency quasi-periodicity in a current mode controlled boost converter // IEEE Trans. Circ. Syst. I. 2012. Vol. 59. P. 207—214.

14. *Simpson D. J. W., Meiss J. D.* Dynamics and bifurcations of nonsmooth systems // Physica D: Nonlinear Phenomena. 2012. Vol. 241. P. 1861—1868.

Сведения об авторах

Жаныбай Турсунбаевич Жусубалиев — д-р техн. наук, профессор; Юго-Западный государственный университет, кафедра вычислительной техники, Курск; E-mail: zhanybai@gmail.com

Алексей Иванович Андриянов — канд. техн. наук, доцент; Юго-Западный государственный университет, кафедра электронных, радиоэлектронных и электротехнических систем, Курск; E-mail: ahaos@mail.ru

Александр Александрович Михалев — аспирант; Юго-Западный государственный университет, кафедра вычислительной техники, Курск; E-mail: alex9561@mail.ru

Владимир Владимирович Шеин — аспирант; Юго-Западный государственный университет, кафедра вычислительной техники, Курск; E-mail: sheinv78@gmail.com

Рекомендована Юго-Западным государственным университетом

Поступила в редакцию 18.02.13 г.